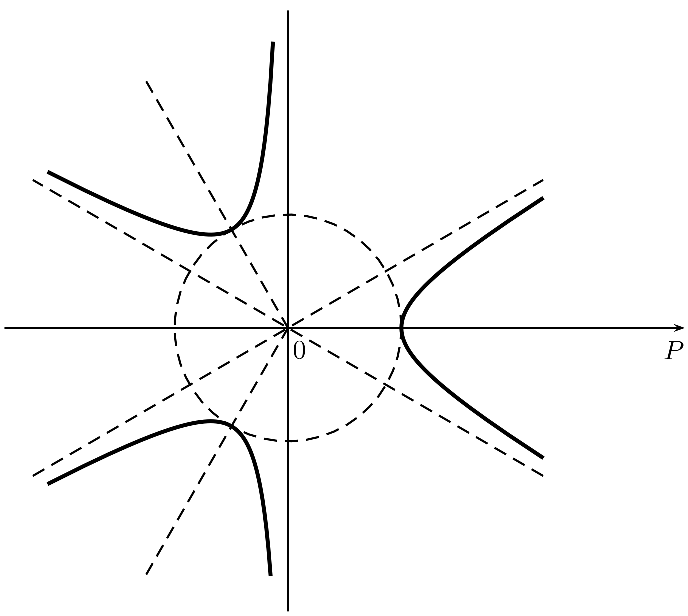
Филиал
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
им. М. В. Ломоносова в Севастополе

КАФЕДРА прикладной математики

Лактионова Н.В., Шавронская А.В.

Исследование и построение графиков функций с использованием производной



Севастополь
2010

Аннотация

УДК 517.4 ББК 22.161.1я2

Рецензенты: Пряшников Ф.Д. д.т.н, профессор, Слепышев А.А. д.ф-м.н.

Лактионова Н.В., Шавронская А.В.

Исследование и построения графиков функций с использованием производной. Учебно–методическое пособие по курсу «Математический анализ»для вузов. Севастополь:,

Пособие содержит основные сведения о функции, методах исследования и построения графиков функций с помощью производной. Систематезированы сведения построения графиков не только в декартовой системе координат явно заданных функций, но и неявно заданных функций, функций, заданных параметрически и в полярной системе координат.

Теоретический материал иллюстрируется примерами и сопровождается рисунками.

Для студентов вузов и специалистов, интересующихся вопросами математики.

Содержание

Введение

Функция — это одно из основных понятий, математических и общенаучных понятий, выражающее зависимость между переменными величинами. Введение В различных науках и областях человеческой деятельности возникают количественные соотношения и математика рассматривает абстрактные переменные величины, изучает различные законы их взаимосвязи, которые на математическом языке называются функциональными зависимостями или функциями.

Будучи абстрактными понятиями, функции описывают различные процессы, явления и события. Возникает важнейшая необходимость исследовать поведение функции и дать ему геометрическую интерпритацию. Еще в школьном курсе изучались функции одной переменной и строились их графики. При потсроении графиков применялись следующие приемы : построение по точкам, действия с функциями (сложение, вычитание, умножение), преобразование графиков (сдвиг, растяжение).

Изучение функции одной переменной в высшей школе запланировано программой по математическому анализу, но изучение поведения функций и построения их графиков предусматривает и новый подход, а именно: исполдьзование производной.

Тема исследования функций и построения их графиков в том числе с помощью производной является предметом изучения многих известных ученых-математиков. К числу таких ученых относятся, например, Фихтенгольц Г.М., Ильин В.А., Позняк Э.Г., Садовничий В.А., Зорич В.А., Ляшко И.М., Кудрявцев Л.Д., Никольский С.М., Виноградова И.А., Гурский И.П., Райхмист Р.Б. и многие другие.
Но при этом проблеме систематизации исследования функций и построения их графиков в различных координах, учета важнейших свойств, характерных осбоенностей и составления четких схем исследования по каждому случаю в работах этих не уделятся вовсе внимания, либо явно недостаточно, либо уделяется как-то вскользь.

Целью данного пособия является систематизация сведений по функции одной переменной и ее свойств, исследования функций и построения их графиков не только в декартовой системе координат явно заданных функций, но и неявно заданных функций, функций, заданных параметрически, и в полярной системе координат.

Предложены схемы исследования, рассмотрены характерные особенности исследования различно заданных функций, отмечены характерные (особые) точки и линии при построении их графиков. Исследование и построение графиков функций выполнено на примерах, иллюстрируется рисунками (эскизами). В приложении А рассматривается построение графиков некоторых функций с помощью геометрических преобразований. В приложении Б пособия приводятся основные важнейшие свойства и графики наиболее широко используемых элементарных функций.

Для закрепления программной темы Применение производной для исследования функции и построения ее графика(в различных координатах) в приложении В пособия прилагается Перечень индивидуальных заданий по вариантам .

Объем пособия включает стр. и состоит из введения, 2 разделов, подразделов, списка литературы из 17 источников, 3 приложений А, Б и В на стр.

Разработанное пособие в соответсвиии с идеей реализации методов формирования у студентов умений и навыков решения задач на применение свойств функций и построения графиков, а также усвоение дополнительных сведений, идей и подходов в этой области.

Построение графиков приведенными методами может служить материалом для закрепления, усовершенствования и систематизации знаний по многим важным разделам высшей математики, что служит хорошей подготовкой к дальнейшему усвоению математики (?), например, выбор пределов интегрирования при узучении таких тем, как Определеный интеграл, Криволинейный интеграл, Кратные интегралы и т.д.

1 Основные сведения

1.1 Понятие функции

Пусть X и Y два множества.

Множество — исходное понятие, служащее для обозначения совокупности объектов, обладающих определенным свойством и называемых *элементами* множества. Обозначают множества прописными буквами какого-либо алфавита, например, X,Y,Z и т.д., а его элементы — строчными буквами того же или другого алфавита, например, x,y,z и т.д.

Говорят, что задано отображение f множества X в множество Y, если каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие единственный элемент $y \in Y$. Это соответсвие записывают так: $f : X \to Y$. Элемент $y = f(x)$,$y \in Y$, соответствующий данному элементу $x \in X$, называется *образом*, а элемент $x \in X$ называется *прообразом* элемента $f(x) \in Y$ при отображении f .

Если Y — числовое множество, то отображение $f : X \to Y$ принято называть *функцией*. Функцию обычно записывают в виде $y = f(x)$, $x \in X$. Множество X в этом случае называют *областью определения* функциии и обозначают $D(f)$. При этом значение x называют аргументом функции.

Число y, которое соответствует данному значению аргумента x, называется *частным значением функции* в точке. Совокупность всех частных значений функции образует множество Y, называемое *множеством всех значений функции* и обозначают $E(f)$.

1.2 Способы задания функции

Различают три основных способа задания функции: табличный, графический и аналитический.

Табличный способ — этот способ состоит в том, что записываются в виде таблицы определенные значения аргумента и соответствующие им значения функции. При этом можно приближенно вычислить не содержащиеся в таблице значения функции, соответствующие промежуточным значениям аргумента. Для этого используется способ интерполяции, заключающийся в замене функции между ее табличными значениями какой-либо простой функцией (например, линейной или квадратичной).

Примеры 1) Зависимость проводимости (G) химического раствора от концентрации вещества (C)

C	C_1	C_2	...	C_n
G	G_1	G_2	...	G_n

2) Расписание движения поезда: определение местоположения поезда (S) в отдельные моменты времени (t)

t	t_1	t_2	...	t_n
S	S_1	S_2	...	S_n

Интерполяция позволяет приближенно определить местоположение поезда в любой промежуточный момент времени.

Графический способ состоит в том, что соответствие между аргуметом и функцией задается посредством графика.

Графиком функции называется множество точек (x, y) координатной плоскости, абсциссы которых пробегают все множество $D(f)$, а ординаты соответсвенно равны $f(x)$.

Построение графика по точкам (x, y)

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

состоит в том, что точки наносят на чертеж и соединяют плавной кривой (рис.1.1).

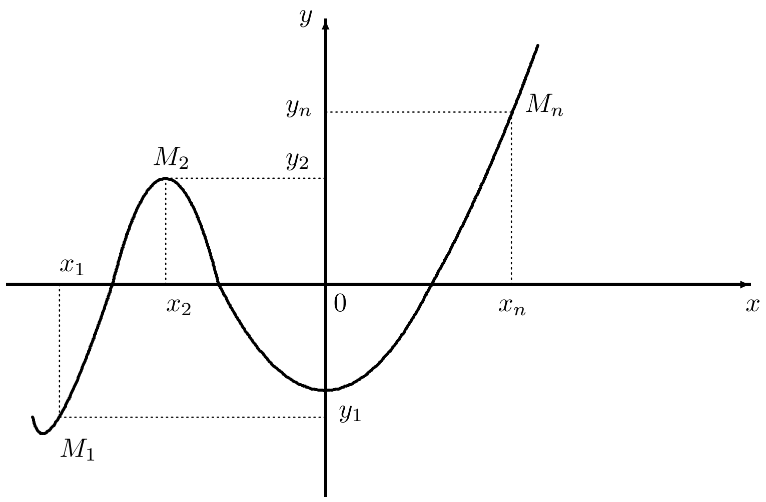


Рис. 1.1

Чем больше точек, тем точнее полученная кривая воспроизводит график функции.

Аналитический способ состоит в том, что функция задается аналитическим выражением или формулой, содержащих указание на те операции или действия над постоянными числами и над значением x, которые надо произвети, чтобы получить соответствующее значение y .

При этом функция может задаваться одной формулой во всей области ее задания или несколькими различными формулами для различных областей задания.

Примеры:

$$1)\ \ y = x^2 + 2x + 5,$$

$$2)\ \ y = \begin{cases} x^2 + 1 & , \text{если} \quad x < 0 \\ x + 1 & , \text{если} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

В общем случае, если нет специальной оговорки, за область определения функции, заданной аналитически, принимают те значения переменной x, при которых функция имеет смысл, т.е. принимает действительные, конечные значения.

При аналитическом способе задания функции в зависимости от особенностей формул различают явное, неявное и параметрическое задания.

При явном задании: связь между аргументом и функцией задается с помощью одной или нескольких формул, разрешенных относительно y.

При неявном задании: зависимость между переменной x и функцией y задается формулой, неразрешенной относительно y.

Примеры:

$$1)\ F(x, y) = 0 \text{ (общий случай)},$$
$$2)\ \sqrt[5]{x^2 + y^2} - \operatorname{tg}(xy)\mathrm{e}^{\frac{x}{y}} - 7 = 0.$$

При параметрическом задании: связь между аргументом и функцией такова, что и аргумент, и функция являются функциями одного и того же аргумента (t или φ), называемого параметром.

Примеры:

$$1)\ \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \text{ (общий случай)},$$
$$2)\ \begin{cases} x = t - 2 \\ y = t^2. \end{cases}$$

При этом каждому значению параметра t соответствует пара чисел (x, y) плоскости XOY. Обычно, в качестве параметра t берут время, угол поворота и т.д.

1.3 Классификация функций

1.3.1 Обратные функции

Пусть f — отображение множества X на множество Y функции $y = f(x)$ и $D(f)$ — область ее определения, а $E(f)$ – область значений (рис.1.2).

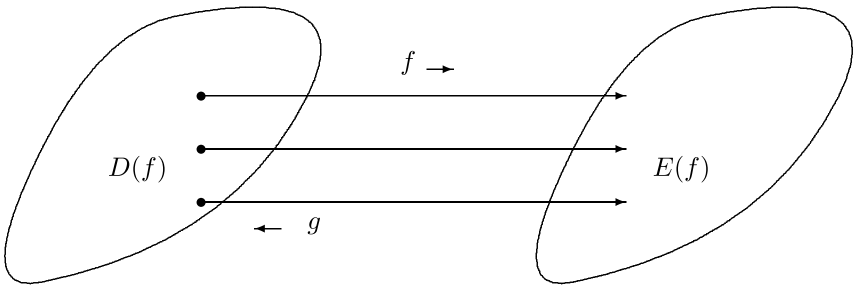


Рис.1.2

Если обратное соответсвие g между множествами $E(f)$ и $D(f)$ является функцией, т.е. каждому y из $E(f)$ соответствует один и только один элемент x из $D(f)$, то это соответствие g называется *обратной* функцией функции f и обозначается $f^{-1} = g$.

Согласно рис.1.3 обратное соответсвие g функцией не является.

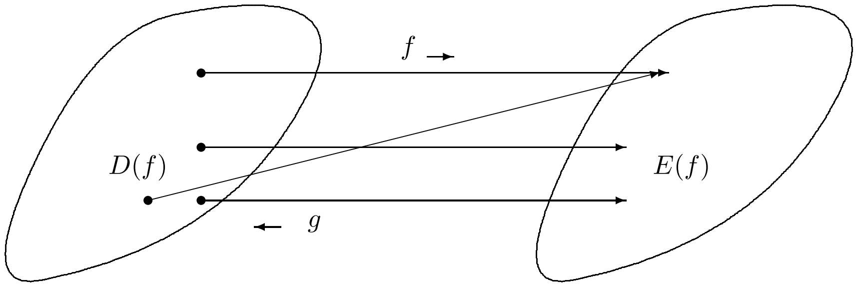


Рис.1.3

Теорема 1.1. Функция является обратимой, т.е. имеет обратную функцию, тогда и только тогда, когда $f(x)$ монотонна, т.е. возрастает (убывает).

При этом, если $f(x)$ возрастает (убывает), то ее обратная функция $g(y)$ также возрастает (убывает). Очевидно $g^{-1} = f$.

На практике. Если какая-либо прямая, параллельная оси OX, пересекает график прямой функции не более чем в одной точке, то обратная функция $x = f^{-1}(y)$ существует. Если хотя бы одна из таких прямых пересекает график прямой функции в двух или большем числе точек, то обратная функция не существует.

Если функции f и g таковы, что $f^{-1} = g$, а $g^{-1} = f$, то функции f и g называют взаимо обратными. Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$.

Пример. $y = a^x$ — показательная функция и пусть $a > 1$; $x = \log_a y$ — обратная функция для $y = a^x$. $x \to y$; $y \to x \Rightarrow$ $y = \log_a x$ — логарифмическая функция (рис.1.4).

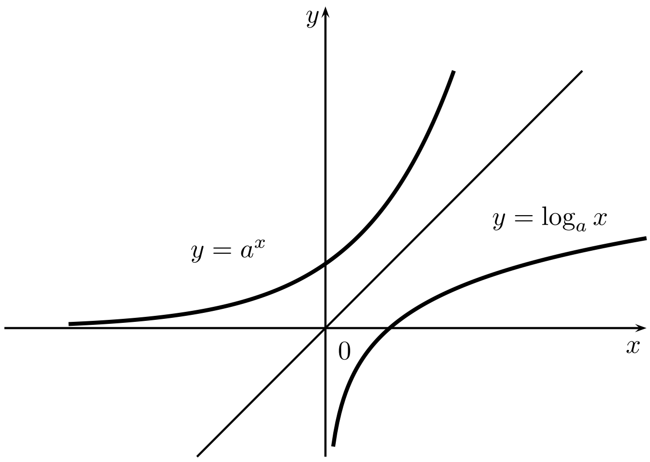


Рис.1.4

1.3.2 Сложные функции

Пусть функции $u = \varphi(x)$ и $y = F(u)$ таковы, что $E(\varphi)$ является подмножеством $D(F)$ ($E(\varphi) \subset D(F)$). Тогда каждому значению $x \in D(\varphi)$ будет соответствовать одно значение $u \in D(F)$, но каждому значению u будет соответствовать одно значение $y \in E(F)$. Таким образом, y является функцией x. Составленная таким образом функция y называется *сложной* функцией независимой переменной x, а u — ее промежуточный аргумент (рис.1.5).

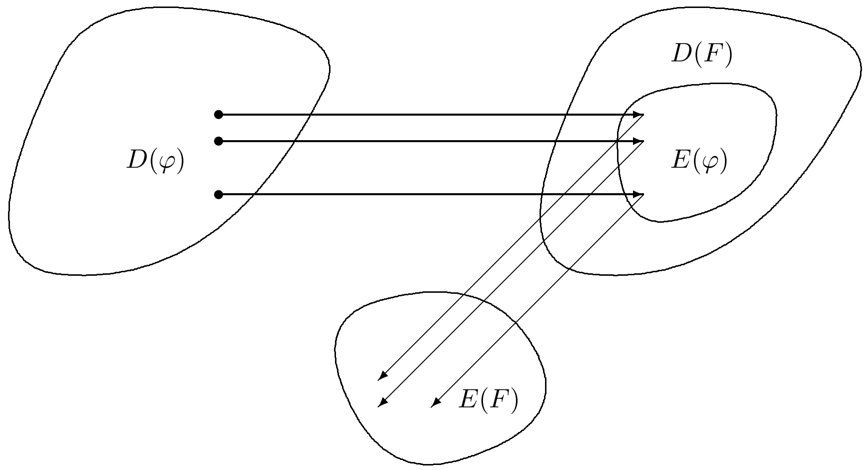


Рис.1.5

Способ составления сложной функции по заданным простым $y = F(u)$, $u = \varphi(x)$ называется суперпозицией или наложением функциональных зависимостей F и φ. Сложная функция может иметь несколько промежуточных аргументов.

Пример. $y = 2^{\cos\sqrt{x^3+4}} \Rightarrow\ y = 2^z$, где $z = \cos v,\ \ v = \sqrt{u},\ u = x^3 + 4$.

1.3.3 Элементарные функции

Основные элементарные функции.

К основным элементарным функциям относят следующие функции:

1) степенная функция $y = x^\alpha,$ где $\alpha \in \mathbb{R}$;

2) показательная функция $y = a^x,$ где $a > 0,\ a \neq 1$;

3) логарифмическая функция $y = \log_a x,$ где $a > 0,\ a \neq 1$;

4) тригонометрические функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;

5) обратные тригонометрические функции: $y = \arccos x$, $y = \arcsin x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

К *элементарным* функциям относят основные элементарные функции и те, которые можно образовать из них с помощью конечного числа арифметических действий: сложения, вычитания, умножения, деления и конечного числа операций взятия функции от функции (суперпозиции).

Примеры: $$1)\ y=\sqrt{1+3\sin^3 x}\ ;$$
$$2)\ y=\frac{\log_4 x+3\sqrt[3]{x}+2\mathrm{tg}\ x}{10^{2x}+7x+4}.$$

Назавем некоторые классы элементарных функций: алгебраические и трансцендентные.

Алгебраическая функция — это элементарная функция, составленная из степенных функций и констант с помощью конечного числа арифметических действий и конечного числа суперпозиций.
Их разделяют на рациональные и иррациональные функции.

К рациональным функциям относят:

1) *целые рациональные* функции, или многочлены:
$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n,$$
где n – целое неотрицательное число (степень многочлена), $a_0, a_1, ..., a_n$ – постоянные числа (коэффициенты).

2) *дробно–рациональные* функции, каждая из которых является отношением двух целых рациональных функций:
$$y=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m}.$$

Примеры:
$$1)\ y=\frac{4x^3-2x4+5}{2x+1};\ \ 2)\ y=\frac{x}{x^4-1}.$$

Иррациональная функция — эта та, которая изображается с помощью суперпозиции рациональных и спетенных функций с рациональными нецелыми показателями.

Примеры:
$$1)\ y=\frac{\sqrt[4]{x^2+2}+x}{\sqrt{x^2+6x+7}};\quad 2)\ y=\sqrt[3]{x-3}.$$

Элементарные функции, которые не являются алгебраическими, называются *трансцендетными.*

Примеры: $1)\, y=\cos x,\ \ 2)\, y=x^3+\cos 3x+2\log_2 x.$

1.3.4 Однозначные и многозначные функции

Если каждому элемнту x множества X по некоторому закону f поставлен один элемент y из множества Y, то функцию $y=f(x)$ называют *однозначной*; если не один, а несколько или бесконечное число элементов $y\in Y$, то функцию называют *многозначной.*

Примеры:
$$1)\ y=2^x\ \ \text{(однозначная функция);}$$
$$2)\ y=\pm\sqrt{x}\ \ \text{(двузначная функция);}$$
$$3)\ y=\mathrm{Arcsin}\ x\ \ \text{(многозначная функция).}$$

1.3.5 Ограниченные и неограниченные функции

Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной снизу* (*сверху*) на множестве $M \subset X$, если существует число C такое, что для любого $x \in M$ выполняется неравенство $f(x) \geq C$ ($f(x) \leq C$). Функция, ограниченная и сверху, и снизу на множестве M, называется ограниченной на множестве M.

Примеры:

1) $y = x^2 - 4x + 6$; $y = \dfrac{x}{x^2+1}$
(ограничены снизу на всей числовой прямой) ;
2) $y = x - x^3 + 3$; $y = 2^{-\sqrt{x}}$
(ограничены сверху на своей естественной
области существования);
3) $y = \sin x$
(ограничена на всей числовой оси) .

Функция $f(x)$ называется ограниченной в точке x_0, если она ограниченна в некоторой окрестности точки x_0. Для ограниченности функции $f(x)$ на [a,b] необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена в любой точке отрезка (сегмента).

1.3.6 Монотонные функции

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на множестве X, если для произвольных $x_1, x_2 \in X$ при $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$). Если для любых $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$ справедливо неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$), то функцию $y = f(x)$ называют *неубывающей* (*невозрастающей*) на X.

Рассмотренные выше функции называются монотонными.

Функция $y = f(x)$ называется кусочно–монотонной на некотором множестве X, если X можно разбить на конечное число подмножеств так, что на каждом из них функция является монотонной.

Сумма двух *возрастающих* (*убывающих*) функций является *возрастающей* (*убывающей*) функцией.

Произведение двух положительных *возрастающих* (*убывающих*) функций является *возрастающей* (*убывающей*) функцией.

Если $y = f(x)$ — возрастающая функция, то функция $(-f(x))$ — убывающая и наоборот.

Если функция $y = f(x)$ — возрастающая ($f(x) \neq 0$), то функция $1/f(x)$ — убывающая, и наоборот.

Если $y = f(x)$ строго монотонная, то обратная функция $x = f^{-1}(y)$ однозначна, сторого монотонна.

Если функция $x = f(t)$ возрастает на $[\alpha; \beta]$, а функция $y = F(x)$ возрастает на $[f(\alpha); f(\beta)]$, то функция $y = F([f(t)])$ возрастает на $[\alpha; \beta]$.

Если функция $x = f(t)$ убывает (возрастает) на $[\alpha; \beta]$, а функция $y = F(x)$ убывает на $[f(\alpha); f(\beta)]$, то функция $y = F([f(t)])$ возрастает (убывает) на $[\alpha; \beta]$.

Все основные элементарные функции являются монотонными или на всей области определения, или в отдельных ее частях.

1.3.7 Четные и нечетные функции

Множество X числовой прямой называется *симметричным относительно начала координат* (точки O), если для любого $x \in X$ число $(-x)$ также принадлежит множеству.

Примеры: 1) вся прямая; 2) $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$; 3) $[-a, a]$; 4) $(-a, a)$.

Функция $f(x)$, заданная на множестве X, называется *четной*, если выполены условия:

1. Множество X симметрично относительно начала координат;
2. Для любого $x \in X$ справедливо равенство $f(-x) = f(x)$.

Примеры: 1) $y = x^2$; 2) $y = \cos x$; 3) $y = \arcsin(x^4 - 4x^2 + 5)$.

Функция $f(x)$, заданная на множестве X, называется *нечетной*, если выполены условия:

1. Множество симметрично относительно начала координат;
2. Для любого $x \in X$ справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$.

Примеры: 1) $y = x^3$; 2) $y = \operatorname{tg} x$; 3) $y = \sin(\operatorname{tg} x)$.

Наряду с четными и нечетными функциями существуют функции, которые не являются ни теми, ни другими. Их называются функциями общего вида.

Примеры: 1) $y = 2^x$; 2) $y = \log_2 x$; 3) $y = \mathrm{e}^x$.

Основные свойства четных и нечетных функций:

1. Алгебраическая сумма двух четных (нечетных) функций есть функция четная (нечетная).

2. Произведение двух четных (нечетных) функций есть функция четная; произведение четной и нечетной функций есть функция нечетная.

3. Если $y = f(x)$, $x = \varphi(t)$ — нечетные функции, то сложная функция $y = f(\varphi(t))$ — нечетная.

4. Если $y = f(x)$ — четная функция, а $x = \varphi(t)$ — нечетная функция, то функция $y = f(\varphi(t))$ — четная, если $x = \varphi(t)$ — четная функция, то и функция $y = f(\varphi(t))$ — четная.

5. Если $y = f(x)$ — четная функция и $f(x) \neq 0$, то и функция $\dfrac{1}{f(x)}$ — четная.

И для четных и для нечетных функций выполняется равенство $|f(x)| = |f(-x)|$.

Произвольную функцию $f(x)$, определенную на симметричном множестве, можно изобразить в виде суммы четной и нечетной функций:

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

(первое слагаемое - четная функция, второе — нечетная).

Пример.

$$e^x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1.3.8 Периодические функции

Пусть $y = f(x)$ определена на множестве X. Если существует число $T \neq 0$ такое, что для любого $x \in X$ числа $x + T$ и $x - T$ также принадлежат множеству X и $f(x+T) = f(x)$ $(f(x-T) = f(x))$, то функцию f называют *периодической с периодом* T.

Примеры:

1) $y = \sin x$; $y = \cos x$ имеют период $2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$;
2) $y = \operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{ctg} x$ имеют период πn, где $n \in \mathbb{Z}$.

Если периодическая функция имеет период T, то она имеет бесконечное множество периодов: $2T, 3T, ..., -T, -2T, -3T, ...$. Наименьший из положительных периодов (если он существует) называется основным периодом периодической функции.

Функция $f(x) = \mathrm{const}$ является периодической, так как она имеет одно и то же постоянное значение при произвольном значении аргумента, т.е. при *любом* $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\alpha \neq 0$ $f(x + \alpha) = f(x)$, α является периодом и функция $f(x)$ *не имеет основного периода.*

Замечания. 1. Сумма и произведение двух функций с одним и тем же периодом T является функцией с периодом T.

2. Если число T было наименьшим положительным периодом двух заданных функций, то после их сложения или умножения период T может перестать быть наименьшим из положительных периодов.

Пример. 1) $f_1 = 3\sin x + 2$ и $f_2 = 2 - 3\sin x$ имеют наименьший период $T = 2\pi$, а их сумма $f_1 + f_2 = 4$ наименьшего периода не имеет.

2) $\varphi_1 = \sin x + 1$ и $\varphi_2 = 1 - \sin x$ имеют наименьший период $T = 2\pi$, а для их произведения $\varphi_1 \varphi_2 = \cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$ наименьшим положительным периодом является число π.

3. Если $f(x)$ — периодическая функция с периодом T, то функция $f(\alpha x)$ также периодическая с периодом $\tau = \dfrac{T}{\alpha}$. Такой же период имеет и функция $f(\alpha x + b)$ $\alpha > 0$.

1.3.9 Непрерывные функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

Функция $y = f(x)$ стремиться к *пределу* b в точке $x = x_0$, если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x, отличных от x_0, для которых $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.
Это записывают так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если число x_0 принадлежит области определения функции, предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ существует и равен значению функции в точке $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение *непрерывной* функции можно дать с помощью понятия приращений.

Приращением аргумента x в точке x_0 называется разность
$\Delta x = x - x_0$, а приращением функции $f(x)$ в точке x_0: $\Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$.

Функция $f(x)$, определенная в окрестности точки x_0, называется непрерывной в точке $x = x_0$, если

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = 0,$$

т.е. бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Функция, *непрерывная в каждой точке* некоторого множества X, называется непрерывной на этом множестве X.

Если выполняется равенство:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) \ \ (f(x_0 + 0) = f(x_0)),$$

то говорят, что функция *непрерывна слева* (*справа*) в точке $x = x_0$.

Для непрерывности функции в точке $x = x_0$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0). \ (*)$$

В тех точках x_0, которые находятся внутри или на границе области определения функции и в которых она неопределена, либо значения $f(x_0)$ не совпадают со значением $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, либо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не существует, функция имеет *разрыв*.

Различают *точки разрыва первого рода* и *точки разрыва второго рода*. Точки разрыва первого рода — это точки, в которых существуют *конечные* *пределы* , называемые односторонними, т.е.

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}f(x)\quad \text{и}\quad f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0}f(x).$$

Если $f(x_0-0)=f(x_0+0)$, но при $x=x_0$ функция $f(x)$ неопределенна или не задана, или имеет значение $f(x_0)\neq\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, то точка $x=x_0$ называется точкой устранимого разрыва.

Примеры:

$$1)\ \lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \text{ но }\ \frac{\sin x}{x}$$

в точке $x=0$ неопределена, поэтому точка

$x=0$ — точка устранимого разрыва.

$$2)\ \operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & \text{если } x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & \text{если } x<0\end{cases}$$

Точка $x=0$ — точка разрыва первого рода, но левосторонний предел функции $\operatorname{sgn}x$ в точке $x=0$ не равен правостороннему пределу.

Точки разрыва второго рода — это точки разрыва функции $f(x)$, в которых хотя бы один из пределов не существует или бесконечен.

Из теорем о пределах функции следует *теорема об арифметических операциях* над непрерывными функциями.

Теорема 1.2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то в этой точке непрерывны и функции $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(x)/g(x)$ (при $g(x)\neq 0$).

Замечания. 1. Любая элементарная функция непрерывна в своей области определения.

2. Если функция $\varphi(y)$ определена на множестве Y, а функция $f(x)$ — на множестве X, причем значения последней не выходят за пределы Y, когда x изменяется в X и если $f(x)$ непрерывна в точке $x=x_0\in X$, а $\varphi(y)$ непрерывна в соответствующей точке $y_0=f(x_0)$, то сложная функция $\varphi(f(x))$ непрерывна в точке $x=x_0$.

2 Исследование функций и построение графиков

2.1 Функции, заданные явно в декартовой системе координат

2.1.1 Нули и знаки функций. Характерные точки графика функции.

В разделе 1.3 мы уже установили ряд условий, обеспечивающих возрастание, убывание, невозрастание и неубывание функции $f(x)$ на произвольном интервале $(a;b)$; и можем утверждать, что изучение вопроса об участках монотонности *дифференцируемой* функции $f(x)$ сводится к исследованию знака первой производной этой функции.

Дальнейшее изучение поведения функции также возможно с помощью производной, а для этого введем некоторые понятия.

Точка x_0 называется точкой *максимума* (*минимума*) функции, если существует достаточно малая окрестность точки x_0 такая,что в любой точке этой окрестности значение функции меньше (больше), чем значение в точке x_0 (рис.2.1, рис.2.2 соответственно).

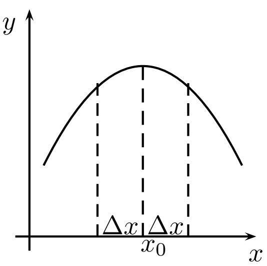


Рис. 2.1

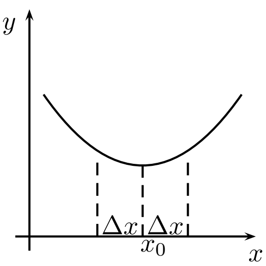


Рис. 2.2

Если точка x_0 — точка максимума функции (минимума), то для любых достаточно малых Δx приращение функции Δy: $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0) < 0$ и наоборот.

Точки *максимума* и *минимума* называются точками *экстремума* функции (ext).

Значение функции в точке *максимума* называется *максимумом* функции, а точке *минимума* — *минимумом* функции.

Замечания. 1. Точка экстремума не может быть граничной, так как для ее определения необходима полная двухсторонняя окрестность.
2. Экстремум функции носит локальный характер, поэтому у функции может быть несколько экстремумов и значение функции в точке максимума может быть меньше значения функции в точке её минимума.

Теорема 2.1(Ферма). Если в точке $x_0 \in (a, b)$ имеется *локальный экстремум* функции $f(x)$, то первая производная в этой точке равна 0.

Точки, в которых *первая производная* функции $f(x)$ равна 0, называются *стационарными.*

Стационарные точки и точки, в которых $f'(x) = \infty$ или не существует называются *критическими.*

Теорема 2.2 (достаточный признак экстремума функции). Пусть функция

$f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируема в проколотой окрестности этой точки. Если производная $f'(x)$ меняет знак «+» на знак « − » при переходе через точку x_0 слева направо, то $f(x)$ имеет *локальный максимум*, если знак «−» на знак «+» , то *локальный минимум*, и если не меняет знак, то *локального экстремума* нет.

Теорема 2.3 (второе достаточное условие экстремума).
Пусть $f'(x_0) = 0$ и существует $f''(x_0)$. Тогда:
1) если $f''(x_0) < 0$, то точка x_0 — точка (строгого) локального максимума;
2) если $f''(x_0) > 0$, то точка x_0 — точка (строгого) локального минимума.

Теорема 2.4 (третье достаточное условие экстремума).
Пусть функция $f(x)$ имеет в некотором интервале $|x - x_0| < \delta$ производные $f'(x),\ f'(x),\ ...f^{(n-1)}(x)$ и в точке x_0 производную $f^{(n)}(x_0)$,
причем $f^{(k)}(x_0) = 0$ $(k = 1, 2, ..., n - 1)$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.
В таком случае: 1) если n — четное число, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет ext, а именно: максимум при $f^{(n)}(x_0) < 0$ и минимум при $f^{(n)}(x_0) > 0$;
2) если n - число нечетное, то в точке x_0 функция $f(x)$ ext не имеет.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в любой точке интервала (a, b). Тогда существует *касательная* к графику функции $y = f(x)$, проходящая через любую точку $M(x, f(x))$ этого графика $(a < x < b)$, причем касательная не параллельна оси OY.

Будем говорить, что график функции $y = f(x)$ имеет на интервале (a, b) *выпуклость*, направленную вниз (вверх), если график этой функции в пределах указанного интервала лежит не ниже (не выше) любой своей касательной (рис.2.3, рис.2.4 соответственно).

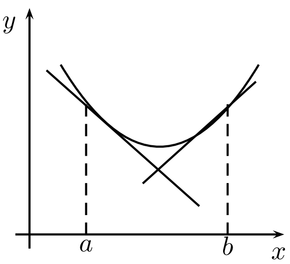


Рис. 2.3

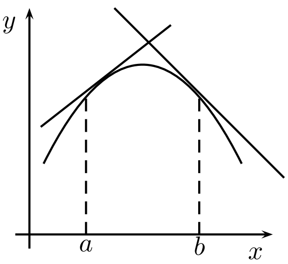


Рис. 2.4

Теорема 2.5 Пусть вторая производная функции $y = f(x)$ непрерывна и положительна (отрицательна) в точке c. Тогда существует такая окрестность точки c, в пределах которой график функции $y = f(x)$ имеет выпуклость, направленную вниз (вверх).

Точка $M(c, f(c))$ графика функции $y = f(x)$ называется *точкой перегиба* этого графика, если существует такая окрестность точки c оси абсцисс, в пределах которой график функции $y = f(x)$ слева и справа от c имеет разные напрвления выпуклости.

Теорема 2.6 (необходимое условие перегиба графика функции).
Если график функции $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $M(c, f(c))$ и если

функция $f(x)$ имеет в точке c непрерывную вторую производную, то $f''(c) = 0$.

Теорема 2.7 (первое достаточное условие перегиба графика функции). Пусть функция $y = f(x)$ имеет вторую производную в некоторой окрестноти точки c и $f''(c) = 0$. Тогда, если в пределах этой окрестности вторая производная $f''(x)$ имеет разные знаки справа и слева от c. Тогда, если $f''(c) = 0$ или $f''(c)$ не существует, то c — точка строгого перегиба графика функции $f(x)$.

Теорема 2.8 (второе достаточное условие перегиба графика функции). Пусть $f(x)$ дважды дифференцируема на (a, b), $f''(c) = 0$ $(a < c < b)$ и существует $f'''(c) \neq 0$. Тогда c — точка строгого перегиба графика функции $f(x)$.

Теорема 2.9 (третье достаточное условие перегиба графика функции). Пусть $c \in (a, b)$ и пусть $f(x)$ дифференцируема $2k$ раз на $[a, b]$. Пусть существует $f^{2k+1}(c) \neq 0$ и $f^{(2)}(c) = f^{(3)}(c) = ... = f^{(2k)}(c) = 0$. Тогда c — точка строгого перегиба.

Всякое число $x_0 \in \mathbb{R}$ обращающее $y = f(x)$ в 0, называется *нулем* (корнем) функции $f(x)$.
Нули функции — это решения уравнения $f(x) = 0$ и являются *точками пересечения* графика функции с осью OX. Пересечение графика функции с осью OY находится из условия подстановки в уранение $y = f(x)$ значения $x = 0$.

Замечание. Нули функции $f(x)$ и точки разрыва функции разбивают ее область определения на промежутки знакопостоянства функции.

2.1.2 Асимптоты графика функции

Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется линия, к которой неограниченно приближается уходящая в бесконечность ветвь графика функции.

Особый класс составляют асимптоты в виде прямой лиии. Их разделяют на вертикальные и наклонные.

Прямая $x = c$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \to c-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to c+0} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.

Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если эта функция представима в виде
$f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

Теорема 2.10 Для того чтобы прямая $y = kx + b$ была наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = b.$$

Замечания. 1. Если хотя бы один из пределов не существует или равен ∞, то график функции не имеет наклонной асимптоты.

2. Аналогично вводится понятие наклонной асимптоты графика функции при $x \to -\infty$.

Примеры:

1) $y = \dfrac{1}{(1-x)^2}$. Прямая $x = 1$ — вертикальная асимптота (рис.2.5).

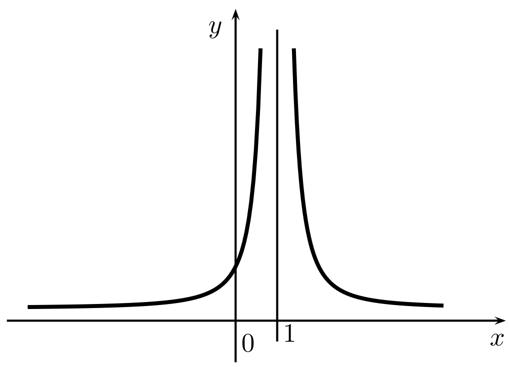


Рис.2.5

2) $y = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$. Прямая $x = 0$ — вертикальная асимптота (рис.2.6).

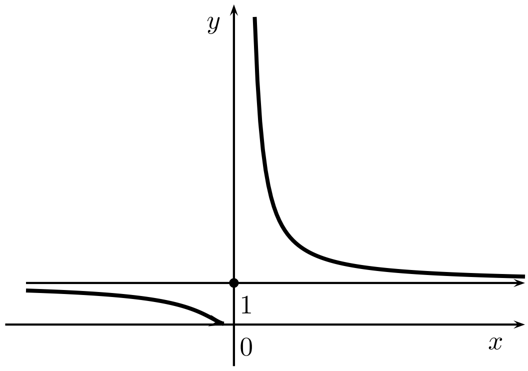


Рис.2.6

3) $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$.

$x_1 = 1$ и $x_2 = 2$ — точки бесконечного разрыва, а прямые $x = 1$ и $x = 2$ — вертикальные асимптоты (рис.2.7). Действительно,

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = +\infty, \ \lim_{x \to 1+0} \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = -\infty;$$

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = -\infty, \ \lim_{x \to 2+0} \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = +\infty.$$

4) $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 4}$.

Функция не имеет вертикальных аситпот.

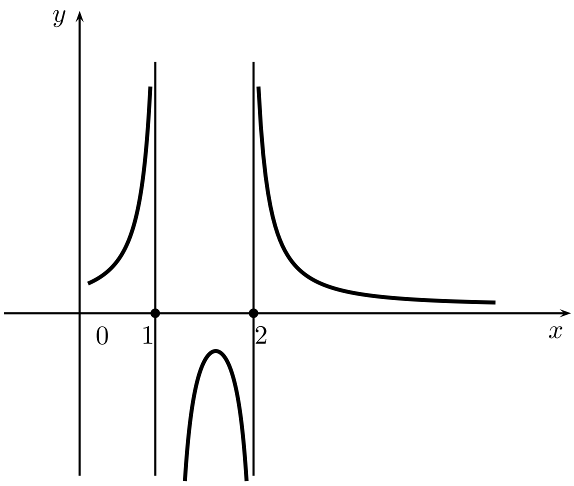


Рис.2.7

Для нахождения наклонной асимптоты графика функции найдем k и b.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{(x^2+4)x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+4} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+4} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^3 - 4x}{x^2+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{-4x}{x^2+4} = 0$$

и уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = x$ (рис.2.8).
Определим, как проходит график функции выше или ниже наклонной асимптоты, а для этого найдем разность δ между ординатой графика $y_{\text{гр}}$ и ординатой асимптоты $y_{\text{ас}}$, т.е.:

$$\delta = y_{\text{гр}} - y_{\text{ас}} = \frac{x^3}{x^2+4} - x = -\frac{4x}{x^2+4}.$$

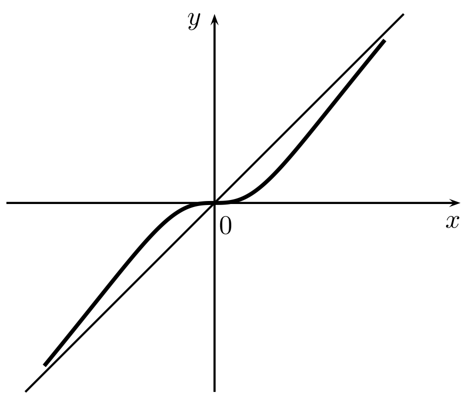


Рис.2.8

Если $\delta > 0$, то график функции расположен выше наклонной асиптоты, а если $\delta < 0$, то ниже.

2.1.3 Исследование функции и построение её графика

В этом разделе мы изложим схему, по которой целесообразно исследовать функцию и строить ее график. Приведем пример, иллюстрирующий эту схему.

Общая схема исследования функции $y = f(x)$.

1. Устанавливаем область задания функции $D(f)$, находим интервалы непрерывности и точки разрыва.
2. Исследуем $f(x)$ на четность, нечетность, периодичность.
3. Выясняем вопрос о существовании асимптот (вертикальных и наклонных).
4. Определяем интервалы монотонности и экстремумы.
5. Находим интервалы сохранения направления выпуклости и точки перегиба.
6. Определяем точки пересечения графика функции с осями координат.
7. Если график не имеет наклонных асимптот, то исследуем поведение функции $f(x)$ при $x \to \pm\infty$, если это допустимо по $D(f)$.

Пример. Исследовать и построить график функции

$$y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$$

Согласно выше приведенной схеме:

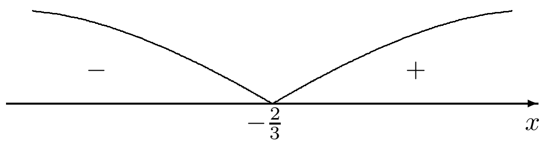
1. $D(f):\ (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$, т.е. функция непрерывна в своей области определения; точка $x_0 = -1$ — точка бесконечного разрыва.
2. Функция $y = f(x)$ — непериодическая.
   Проверка четности функции
   $$f(-x) = \frac{(-x)^3}{2(1-x)^2} = -\frac{x^3}{2(1-x)^2}$$
   показывает, что $y = f(x)$ общего вида
3. Вертикальная асимптота $x = -1$. Определяем знаки левостороннего и правостороннего пределов:
   $$\lim_{x\to -1-0} f(x) = -\infty \quad \lim_{x\to -1+0} f(x) = -\infty.$$
   Ищем наклонную асимптоту в виде $y = kx + b$:
   $$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2(x+1)^2 x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2(x+1)^2} = \frac{1}{2};$$
   $$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{x}{2}\right) =$$
   $$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^3 - 2x^2 - x}{2(x^2+2x+1)} = -1,$$

Уравнение наклонной асимптоты: $y = \dfrac{x}{2} - 1$.

Взаимное расположение графика функции и наклонной асимтоты определим по знаку δ:

$$\delta = \frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{x-2}{2} = \frac{x^3 - x^3 - 2x^2 - x + 2x^2 + 4x + 2}{2(x+1)^2} =$$
$$= \frac{3x+2}{2(x+1)^2}$$

Полученное выражение приравняем нулю, т.е $\dfrac{3x+2}{2(x+1)^2} = 0$. В окрестности точки $x = -\frac{2}{3}$ исследуем знак δ.



Можно сделать вывод, что в интервале $(-\infty; -\frac{2}{3})$ график функции лежит ниже асимптоты, а в интервале $(-\frac{2}{3}; \infty)$ — выше.

4. Для нахождения областей возрастания и убывания функции вычислим её первую производную:

$$y'(x) = \frac{1}{2}\frac{3x^2(x+1)^2 - 2x^3(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{x^2(3x+3-2x)}{2(x+1)^3}$$

$$= \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}.$$

Имея в виду, что точки $x_1 = 0$, $x_2 = -3$ — стационарные и что сама функция и её первая производная не существуют при $x = -1$, получим следующие области сохранения знака y' (таблица 2.1):

Таблица2.1

Область значений x	$-\infty < x < -3$	$-3 < x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < +\infty$
Знак y'	$+$	$-$	$+$	$+$
Поведение функции	возрастает	убывает	возрастает	возрастает

Из приведенной таблицы 2.1 очевидно, что функция имеет одну точку ext, а именно точку максимума $x = -3$, причем $f(-3) = -\dfrac{27}{8}$ — максимум функции.

5. Для нахождения области сохранения направления выпуклости вычислим

вторую производную

$$y'' = \left(\frac{x^3+3x^2}{2(x+1)^3}\right)' = \frac{1}{2}\frac{(3x^2+6x)(x+1)}{(x+1)^6} -$$
$$- \frac{3(x^3+3x^2)(x+1)^2}{(x+1)^6} = \frac{3x}{(x+1)^4}.$$

Имея в виду, что сама функция и её производные не существуют в точке $x=-1$, получим следующие области сохранения знака y'' (таблица 2.2):

Таблица2.2

Область значений x	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < +\infty$
Знак y''	$-$	$-$	$+$
Направление выпуклости графика	вверх	вверх	вниз

Из приведенной таблицы 2.2 очевидно, что график функции имеет перегиб в точке $(0,0)$.

6. Точки пересечения графика с осью Ох и осью Оу $y=0$, $x=0$, т.е.$(0;0)$ — точка пересечения с осями координат.
По полученных данных строим эскиз графика рассматриваемой функции (рис.2.9).

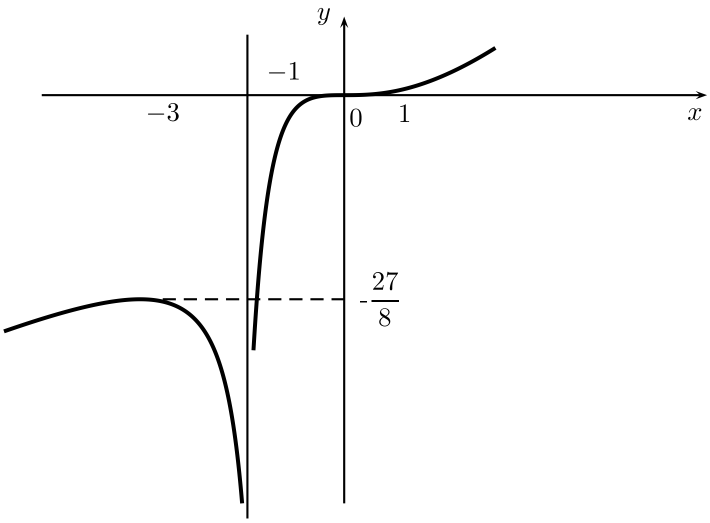


Рис.2.9

2.2 Функции, заданные параметрически

2.2.1 Схема исследования

Пусть уравнение плоской кривой имеет вид $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in T$, где T — общая часть областей определения функций $x(t)$, $y(t)$.

Исследование и построение такой кривой можно провести по следующей схеме:

1. Устанавливаем множество T как пересечение областей определения функций $x(t)$, $y(t)$ (если T не задано), отмечая, в частности, те значения параметра t_i (включая $t_i = \pm\infty$), для которых хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{t\to t_i\pm 0} x(t)$, $\lim\limits_{t\to t_i\pm 0} y(t)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.

2. Устанавливаем, обладает ли кривая симметрией, что позволит сократить выкладки.

3. Находим нули функций $x(t)$, $y(t)$ и области их знакопостоянства.

4. Находим точки t_m, в которых хотя бы одна из производных x'_t, y'_t равна нулю или разрывна. Точки t_i, отмеченные в п.1, и точки t_m разбивают множество T на промежутки знакопостоянства производных x'_t, y'_t. Поэтому на каждом таком промежутке (t_p, t_{p+1}) функция $x(t)$ строго монотонна и система уравнений $x = x(t)$, $y = y(t)$ на интервале (t_p, t_{p+1}) задает параметрически функцию вида $y = f(x)$.

   Производные этих функций определяют:
   $$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}; \quad y''_x = \frac{(y'_x)'}{x'_t}.$$

   Замечание. Часть кривой, соответствующей изменению параметра t от t_p до t_{p+1}, будем называть *ветвью* кривой. Каждая ветвь кривой является графиком функции вида $y = f(x)$.

5. Находим точки t_j, в которых $y''_x = 0$.

6. Составляем таблицу вида (таблица 2.3):

Таблица2.3

(t_p, t_{p+1})		$\cdots$	
(x_p, x_{p+1})		$\cdots$	
(y_p, y_{p+1})		$\cdots$	
Знак y''_x		$\cdots$	

В первой строке таблицы 2.3 записываем промежутки изменения параметра t, граничными точками которых t_p и t_{p+1} служат точки, найденные в п.1,4,5. Во второй и третьей строках таблицы 2.3 записываем соответствующие промежутки изменения переменных x и y, а в последней строке таблицы указываем знак производной y''_x, определяющий направление выпуклости графика соответствующей ветви кривой.

7. Пользуясь таблицей 2.3, строим ветви кривой, соответствующие промежуткам (t_p, t_{p+1}).

2.2.2 Характерные особенности, особые точки

Симметрия. При изучении симметрии кривой (п.2 схемы) следует иметь в виду все случаи, когда вместо всей области определения T достаточно рассмотреть лишь неотрицательную ее часть:
а) если для $\forall t \in T$ $x(t) = x(-t),\ y(t) = -y(-t)$, то кривая симметрична относительно оси OX;
б) если для $\forall t \in T$ $x(t) = -x(-t),\ y(t) = y(-t)$, то кривая симметрична относительно оси OY;
в) если для $\forall t \in T$ $x(t) = -x(-t),\ y(t) = -y(-t)$, то кривая симметрична относительно начала координат;
б) если для $\forall t \in T$ $x(t) = x(-t),\ y(t) = y(-t)$, то наложение;
Замечание. Отмеченные выше признаки являются достаточными, но не необходимыми.

Асимптоты кривой. Кривая имеет *вертикальную* асимптоту $x{=}x_0$, если одновременно выполняются равенства:

$$\lim_{\substack{t\to t_p \\ (t\to t_p+0 \text{ или } t\to t_p-0)}} y(t) = \infty \quad , \qquad \lim_{\substack{t\to t_p \\ (t\to t_p+0 \text{ или } t\to t_p-0)}} x(t) = x_0$$

Кривая имеет *горизонтальную* асимптоту $y = y_0$, если одновременно выполняются равенства:

$$\lim_{\substack{t\to t_p \\ (t\to t_p+0 \text{ или } t\to t_p-0)}} x(t) = \infty \quad , \qquad \lim_{\substack{t\to t_p \\ (t\to t_p+0 \text{ или } t\to t_p-0)}} y(t) = y_0.$$

Если при $t \to t_p$ $(t \to t_p + 0$ или $t \to t_p - 0)$ $x \to \infty$ и $y \to \infty$, то возможна *наклонная* асимптота в виде $y = kx + b$. Если такое значение t найдено, то k и b определяем по формулам:

$$k = \lim_{\substack{t\to t_p \\ (t\to t_p+0 \text{ или } t\to t_p-0)}} \frac{y(t)}{x(t)} \quad , \qquad b = \lim_{\substack{t\to t_p \\ (t\to t_p+0 \text{ или } t\to t_p-0)}} [y(t) - kx(t)],$$

причем пределы, стоящие в правых частях этих формул, существуют.

Точки пересечения с осями координат. Из уравнения $y(t) = 0$ находим значения t, которые определяют точки пересечения кривой с осью *абсцисс.*

Из уравнения $x(t) = 0$ находим значения t, которые определяют точки пересечения кривой с осью *ординат.*

Особые точки. Точка (x_0, y_0) кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$ называется *особой*, если при $t = t_0 : x_0 = x(t_0),\ y_0 = y(t_0),\ x'(t_0) = y'(t_0) = 0.$

Другие точки кривой, в которых хотя бы одна из производных x_t' или y_t' не равна нулю, называются *неособыми* точками. В любой неособой точке (x_0, y_0) уравнение касательной имеет вид:

$$y - y_0 = \frac{y_t'(t_0)}{x_t'(t_0)}(x - x_0), \text{ если } \ x_t'(t_0) \neq 0,$$

$$x - x_0 = \frac{x_t'(t_0)}{y_t'(t_0)}(y - y_0), \text{ если } \ y_t'(t_0) \neq 0.$$

Определение точек кривой, в которых *касательные параллельны осям координат.*

Чтобы касательная к кривой была *параллельна оси абсцисс*, должно выполнятся условие: $y_x' = 0$, т.е. значения t, соответствующие таким точкам, ищем из уравнения $y_t' = 0$, если $x_t' \neq 0$.

Значения t, соответствующие точкам, в которых касательная к кривой *параллельна оси ординат*, ищем из уравнения $x_t' = 0$, если $y_t' \neq 0$..

Точки перегиба. Значение t, соответствующие точкам перегиба кривой, определяем из уравнения

$$x_t' y_t'' - y_t' x_t'' = 0, \text{ если } x_t' \neq 0.$$

Определение *двойных точек* кривой. В двойной точке (x_1, y_1) кривой пересекаются две ветви кривой, имеющие различные касательные. Отсюда следует, что должны существовать два различных значения t_1 и t_2 параметра t такие, что

$$x_1 = x(t_1) = x(t_2)$$

$$y_1 = y(t_1) = y(t_2).$$

Решаем эту систему и проверяем, имеют ли угловые коэффициенты касательных к кривой при найденных значениях параметра t, т.е дроби $\frac{y_t'(t_1)}{x_t'(t_1)}$ и $\frac{y_t'(t_2)}{x_t'(t_2)}$, разные значения. Если да, то кривая имеет *двойную точку.*

Определение точек возврата. В точках возврата должны выполнятся равенства $x_t' = 0$, $y_t' = 0$, а $x_t''' y_t'' - y_t''' x_t'' \neq 0$, т.е. в этой точке угловой коэффициент касательной неопределенный.

2.2.3 Построение графиков функций, заданных параметрически

Пример 1. Построить график функции

$$x = \frac{t^2}{t^2 + 1}; \ y = \frac{t(1 - t^2)}{t^2 + 1}.$$

1. Область определения функции: $[0,1)$. Действительно, значение $x = \dfrac{t^2}{t^2+1}$ при любом t является положительным числом, меньшим единицы. Следовательно, кривая расположена между прямыми $x = 0$ и $x = 1$.
   Область значений функции: $(-\infty, +\infty)$.

2. Так как $x(t) = x(-t)$ — четная, а $y(t) = -y(-t)$ — нечетная функции, то кривая симметрична относительно оси абсцисс.

3. Находим точки пересечения графика функции с осями координат.
   При $t = 0:\ x = 0$ и $y = 0$, т.е. кривая проходит через точку $O(0,0)$. Если $y = 0$ и $t = 1$, то $x = 1/2$ и кривая проходит через точку $(1/2, 0)$.

4. Находим первые производные:

$$x'_t = \frac{2t}{(t^2+1)^2};\ y'_t = \frac{1-4t^2-t^4}{(t^2+1)^2}$$

$$y'_x = \frac{1-4t^2-t^4}{2t}.$$

5. Устанавливаем, что существуют две точки A и B при $t = \pm\sqrt{-2+\sqrt{5}}$, в которых касательная параллельна оси абсцисс.
   При $0 < x < \dfrac{1}{2}$, $y > 0$, $y''_x < 0$ — кривая выпуклая, а при $\dfrac{1}{2} < x < 1$, $y > 0$, $y''_x > 0$ — кривая вогнутая.

6. Проверяем, имет ли кривая двойную точку из условий:
   $x(t_1) = x(t_2);\ y(t_1) = y(t_2)$

$$1)\quad \begin{cases} \dfrac{t_1^2}{t_1^2+1} = \dfrac{t_2^2}{t_2^2+1}\ (1) \\[2ex] \dfrac{t_1(1-t_1^2)}{t_1^2+1} = \dfrac{t_2(1-t_2^2)}{t_2^2+1}\ (2). \end{cases}$$

   Решив эту систему, находим два разных значения $t_1 = 1$ и $t_2 = -1$, для которых $x(t_1) = x(t_2)$ и $y(t_1) = y(t_2)$. Следовательно, точка $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ — двойная точка кривой. Находим угловые коэффициенты k_1 и k_2 касательных к ветвям кривой, которые пересекаются в этой точке

$$k_1 = \frac{y'_t(t_1)}{x'_t(t_1)} = -2,\quad k_2 = \frac{y'_t(t_2)}{x'_t(t_2)} = 2,$$

   т.е. k_1 и k_2 имеют разнае знаки, то это подтверждает, что точка $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ является двойной точкой.

Асимптоты.

$\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t^2}{t^2+1} = 1,\ \lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t(1-t^2)}{t^2+1} = -\infty,$

т.е. кривая имеет вертикальную асимптоту $x = 1$. Наклонных асимптот нет.

7. Строим график функции с учетом симметрии ее относительно оси OX (рис.2.10).

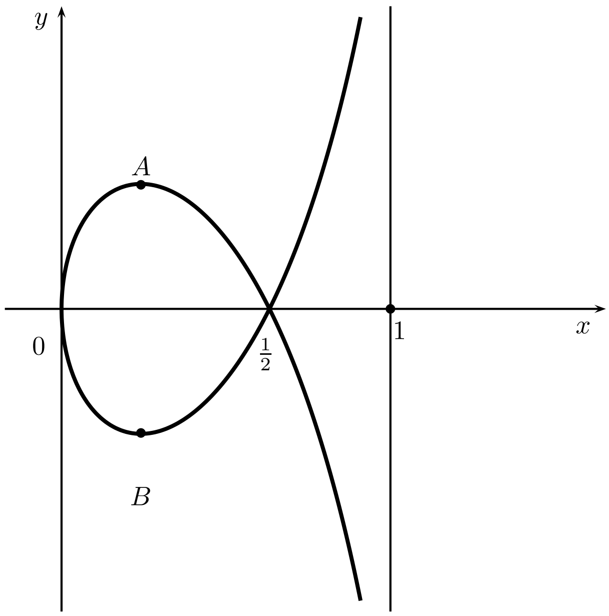


Рис.2.10

Пример 2. Построить график функции

$$x = \frac{t}{1-t^2};\ y = \frac{t(1-2t^2)}{1-t^2}.$$

1. Имеем $t \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$,
   $x \in (0, +\infty) \cup (-\infty, +\infty) \cup (-\infty, 0)$ — область определения функции,
   $y \in (-\infty, -\infty) \cup (+\infty, -\infty) \cup (+\infty, +\infty)$ — область значений функции.

   Отсюда следует, что $x = 0$ — вертикальная асимптота кривой, а при $t \to -1$ и $t \to 1$ возможны наклонные асимптоты. Действительно,

$$k_1 = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t\to1\pm0} (1-2t^2) = -1$$

$$b_1 = \lim_{x\to\pm\infty} (y+x) = \lim_{t\to1\pm0} 2t = 2$$

   Аналогично находятся пределы при $t \to -1$

$$k_2 = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t\to-1\pm0} (1-2t^2) = -1$$

$$b_2 = \lim_{x\to\pm\infty} (y+x) = \lim_{t\to-1\pm0} 2t = -2$$

   Итак, кривая имеет две асимптоты $y = -x + 2$, $y = -x - 2$.

2. Так как $x(t) = -x(-t),\ y(t) = -y(-t)$, то кривая обладает симметрией относительно точки $O(0,0)$.
   Поэтому достаточно рассмотреть далее множество $M = [0,1) \cup (1,+\infty)$.

3. Находим точки пересечения графика функции с осями координат.
   При $t = 0$ $x(t) = 0$, а при $t = 0$ и $t = 1/\sqrt{2}$ $\quad y(t) = 0$.

4. $x'_t = \dfrac{1+t^2}{(1-t^2)^2},\ \ y'_t = \dfrac{2t^4 - 5t^2 + 1}{(1-t^2)^2}$.
   На множестве M : $x'_t > 0$, а $y'_t = 0$ при $t_1 = 0,5\sqrt{5-\sqrt{17}} \approx 0,47$;
   $t_2 = 0,5\sqrt{5+\sqrt{17}} \approx 1,51$.

5. $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{2t^4 - 5t^2 + 1}{1+t^2}$;
   $y''_x = \dfrac{(y'_t)'}{x'_t} = \dfrac{4t(1-t^2)(3+t^2)}{(1+t^2)^3} \Rightarrow$
   $y''_x < 0$ при $t \in [0,1),\ y''_x > 0$ при $t \in (1,+\infty)$.

6. Составляем таблицу 2.4 :

Таблица2.4

(t_p, t_{p+1})	$(0;0,47)$	$(0,47;1)$	$(1;1,51)$	$(1,51;+\infty)$
(x_p, x_{p+1})	$(0;0,6)$	$(0,6;+\infty)$	$(-\infty;-0,7)$	$(-0,7;0)$
(y_p, y_{p+1})	$(0;0,3)$	$(0,3;-\infty)$	$(-\infty;2,3)$	$(2,3;+\infty)$
Знак y''_x	$+$	$+$	$-$	$-$

7. Строим кривую, соответствующую множеству M и продолжаем ее на всю область определения функции с учетом ее симметрии относительно начала координат (рис.2.11).

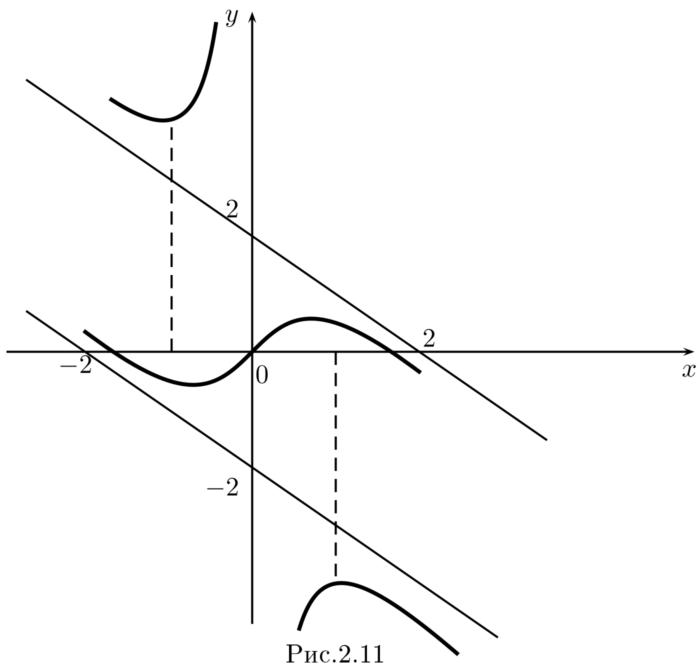


Рис.2.11

2.3 Функции, заданные неявно

2.3.1 Некоторые понятия и определения

Пусть задано уравнение $\mathcal{F}(x, y) = 0$.

Назовем *линией*, заданной этим уравнением, *множество* всех точек плоскости, координаты x и y которых *удовлетворяют* этому уравнению.

Если *множество* точек плоскости XOY, координаты которых удовлетворяют этому уравнению, состоит из *конечного* числа *непрерывных линий*, каждая из которых есть график *однозначной* функции $y = f_i(x),\ i = 1, \dots, n$, то говорят, что это уравнение задает неявно семейство непрерывных функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x), \dots, y = f_n(x)$.

Примеры: 1) $x^2 + y^2 = 0$ — уравнение задает одну точку; 2) $x^2 - y^2 = 0$ — уравнение задает линию, состоящую из двух прямых $y = x$; $y = -x$.

Замечания. 1. Уравнение $\mathcal{F}(x, y) = 0$, которое задает конечное число непрерывных функций, может удовлетворят бесконечно много функций, не являющихся непрерывными.

Пример. $x^2+y^2 = 1$ — уравнение задает семейство, состоящее из двух функций $y = +\sqrt{1-x^2}$ и $y = -\sqrt{1-x^2}$. В то же время уравнение $y = +\sqrt{1-x^2}$ удовлетворять бесконечно много функций, не являющихся непрерывными (рис.2.12).

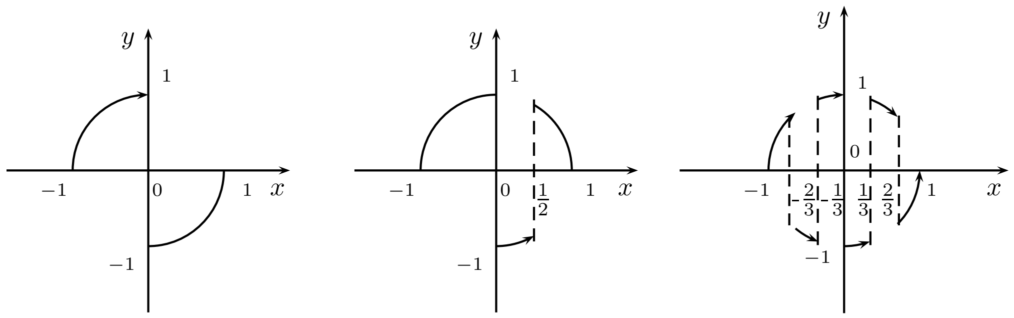


Рис.2.12

2. Иногда уравнение $\mathcal{F}(x, y) = 0$ можно аналитически разрешить относительно одной из переменных. В этом случае построение множества точек, удовлетворяющих уравнению $\mathcal{F}(x, y) = 0$, сводится к рассмотрению способа построения графика функции, изложенного в п.2.1, а затем полученную линию вместе с осями координат отразить симметрично относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Пример. Построить график в системе XOY линии $x - y + y^3 = 0$.

Разрешим исходное уравнение относительно $x(y) = y - y^3$.

Функция $x(y)$ — нечетная. График этой функции в системе YOX представлен на рисунке 2.13а. Отображая построенную линию относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов, получим исходную кривую $x - y + y^3 = 0$ в системе координат XOY(рис.2.13б).

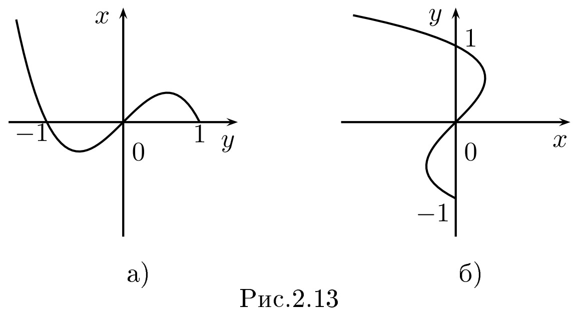


Рис.2.13

3. При построении линии, задаваемой уравнением $\mathcal{F}(x, y) = 0$, иногда можно ввести параметр t так, что данное уравнение $\mathcal{F}(x, y) = 0$ равносильно одному или нескольким уравнениям(соотношениям) $x = x(t)$, $y = y(t)$, либо перейти к полярной системе координат. Примеры такого типа будут рассмотрены далее.

4. В зависимости от введенной подстановки в уравнении $\mathcal{F}(x, y) = 0$ $(*)$ и применения системы координат используется соответствующая схема построения графика функции(*).

2.3.2 Особые точки и некоторые характерные особенности.

Особые точки кривой $\mathcal{F}(x, y) = 0$.

Точка $M(x_0, y_0)$ кривой $\mathcal{F}(x, y) = 0$ называется *особой точкой*, если ее координаты *одновременно* удовлетворяют трем уравнениям:

$$\begin{cases} \mathcal{F}(x_0, y_0) = 0 \\ \mathcal{F}_x(x_0, y_0) = 0 \\ \mathcal{F}_y(x_0, y_0) = 0, \end{cases}$$

где $\mathcal{F}_x(x_0, y_0)$, $\mathcal{F}_y(x_0, y_0)$ — *частные производные* взятые от $\mathcal{F}(x, y) = 0$ по переменным x и y соответсвенно и вычисленные в точке $M(x_0, y_0)$.

Угловой коэффициент k к кривой в особой точке $\left(k = -\dfrac{\mathcal{F}_x}{\mathcal{F}_y}\right)$ неопределенный.

Пусть в особой точке *частные производные* второго порядка $\mathcal{F}_{xx}$, $\mathcal{F}_{xy}$, $\mathcal{F}_{yy}$ не равны одновременно нулю, тогда *точка* $M(x_0, y_0)$ является *двойной* точкой кривой, причем *форма* кривой в ее двойной точке характеризуется значением δ:

$$\delta = \mathcal{F}^2_{xy}(x_0, y_0) - \mathcal{F}_{xx}(x_0, y_0) \cdot \mathcal{F}_{yy}(x_0, y_0) \ \text{ и при}$$

а) $\delta > 0$, кривая имеет узловую точку (рис.2.14) ;

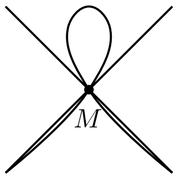


Рис.2.14

б) $\delta < 0$, $M(x_0, y_0)$ — изолированная точка (рис.2.15);

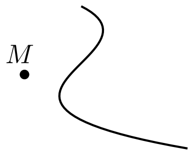


Рис.2.15

в) $\delta = 0$, точка $M(x_0, y_0)$ может быть точкой возврата первого (рис.2.16) или второго (рис.2.17) рода или изолированной точкой, или точкой самокасания (рис.2.18).

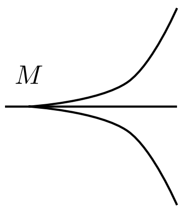


Рис. 2.16

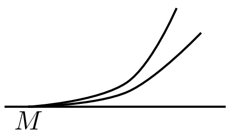


Рис. 2.17

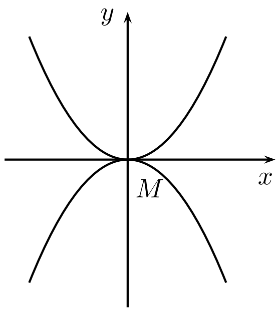


Рис. 2.18

Наличие *двойной* точки в начале координат у алгебраической кривой определяют так: в приведенном уравнении такой кривой не должно быть свободного члена и членов с первыми степенями переменных.

Замечания. 1. Уравнения касательных к кривой в особой точке, которая совпадает с точкой $(0, 0)$, можно получить, если приравнять нулю группу членов наиболее низкой степени.

2. Если особая точка не совпадает с началом координат, то уравнения касательных к кривой в этой точке можно получить, если принять особую точку за начало координатной системы и приравнять (в полученном после преобразований уравнении) нулю группу членов самой низкой степени.

Симметрия. Если уравнение кривой $\mathcal{F}(x, y) = 0$ не меняется при замене:
1) $x \to -x$, то кривая симметрична относительно оси ординат;
2) $y \to -y$, то кривая симметрична относительно оси абсцисс;
3) $x \to -x,\ y \to -y$ (одновременно), то кривая симметрична относительно начала координат;
4) $y \to x,\ x \to y$ (одновременно), то кривая симметрична относительно

биссектриссы первого и третьего координатных углов ($y = x$);
5) $y \to -x,\ x \to -y$ (одновременно), то кривая симметрична относительно биссектриссы второго и четвертого координатных углов ($y = -x$);

Точки экстремума кривой $\mathcal{F}(x, y) = 0$.
Для определения *критических* точек кривой, заданной уравнением $\mathcal{F}(x, y) = 0$, вначале находим угловой коэффициент k касательной в произвольной точке такой кривой:

$$k = -\frac{\mathcal{F}_x}{\mathcal{F}_y}.$$

Чтобы определить на кривой точку, в которой *касательная параллельна оси абсцисс*, необходимо решить систему:

$$\begin{cases} \mathcal{F}_x(x, y) = 0 \\ \mathcal{F}(x, y) = 0 \end{cases}$$

Пусть x_1, y_1 — корни этой системы, причем $\mathcal{F}_y(x_1, y_1) \neq 0$, тогда точка $M(x_1, y_1)$ является для кривой
а) точкой максимума y_{max}, если $\mathcal{F}_{xx}(x_1, y_1) \cdot \mathcal{F}_y(x_1, y_1) > 0$;
б) точкой минимума y_{min}, если $\mathcal{F}_{xx}(x_1, y_1) \cdot \mathcal{F}_y(x_1, y_1) < 0$.

Чтобы определить на кривой точку, в которой *касательная параллельна оси ординат*, необходимо решить систему:

$$\begin{cases} \mathcal{F}_y(x, y) = 0 \\ \mathcal{F}(x, y) = 0 \end{cases}$$

Если x_1, y_1 — корни этой системы, причем $\mathcal{F}_x(x_1, y_1) \neq 0$, тогда точка $M(x_1, y_1)$ является для кривой
а) точкой максимума y_{max}, если $\mathcal{F}_{yy}(x_1, y_1) \cdot \mathcal{F}_x(x_1, y_1) > 0$
б) точкой минимума y_{min}, если $\mathcal{F}_{yy}(x_1, y_1) \cdot \mathcal{F}_x(x_1, y_1 < 0$.

Точки перегиба кривой $\mathcal{F}(x, y) = 0$.
Если уравнение $\mathcal{F}(x, y) = 0$ нельзя разрешить относительно y, то найти точки перегиба кривой в общем виде трудно. Иногда можно использовать такое свойство: точки перегиба алгебраической кривой $\mathcal{F}(x, y) = 0$ должны находиться в точках пересечения этой кривой с дополнительной кривой, определяемой уравнением: $\mathcal{F}_{xx}\mathcal{F}_y^2 - 2\mathcal{F}_{xy}\mathcal{F}_y + \mathcal{F}_{yy}\mathcal{F}_x^2 = 0$.

Асимптоты кривой.
Для нахождения *горизонтальной* асимптоты приравнивают нулю *коэффициенты* при высшей степени x, входящий в уравнение $\mathcal{F}(x, y) = 0$. Если этот коэффициент равен постоянной величине, то *горизонтальной* асиптоты нет. Для нахождения *вертикальной* асимптоты приравнивают нулю коэффициент при высшей степени y, входящий в уравнение $\mathcal{F}(x, y) = 0$. Если этот коэффициент равен постоянной величине, то вертикальной асимптоты *нет*. Для нахождения наклонных асимптот необходимо y в уравнении $\mathcal{F}(x, y) = 0$

кривой заменить на $kx + b$ и приравнять нулю коэффициенты при двух высших степенях x и полученную систему решить относительно k и b.

2.3.3 Построение графиков

Учитывая особенности функций рассмотрим построение их графиков на примерах.

Пример 1. Построить график кривой

$$x^4 + 2y^2 - x^2 - y^4 = 0$$

1. Для нахождения области определения функции, заданной неявно разрешим данное уравнение относительно y. Получаем $y = \pm\sqrt{1 + \sqrt{x^4 - x^2 + 1}}$ и $y = \pm\sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2 + 1}}$, т.е имеем *две ветви* кривой. В области определения обеих ветвей должно выполняться неравенство $x^4 - x^2 + 1 \geq 0$ или $(x^2 - 1)^2 + x^2 \geq 0$, справедливо для всех x. Для точек второй ветви необходимо, чтобы $\sqrt{x^4 - x^2 + 1} \leq 1$ или $x^2 - 1 \leq 0$, что возможно при $|x| < 1$. С учетом проведенного анализа область определения первой ветви: $x \in (-\infty, \infty)$, область определения второй ветви: $x \in [-1, 1]$.

2. Горизонтальных и вертикальных асимптот кривая не меет, поскольку коэффициент при старших степенях x и y в уравнении постоянны. Находим наклонные асимптоты, для чего в исходное уравнение вместо y подставим $y = kx + b$, получим:

$$x^4 - (kx + b)^4 - x^2 + 2(kx + b)^2 = 0$$

Приравняем нулю коэффициенты при x^4 и x^3 и получим систему уравнений относительно неизвестных k и b:

$$\begin{cases} k^4 - 1 = 0 \\ 4k^3 b = 0 \end{cases} \Rightarrow k = \pm 1;\ b = 0.$$

Следовательно, прямые $y = x$ и $y = -x$ — наклонные асимптоты рассматриваемой кривой.

3. Кривая симметрична относительно осей координат.

4. Для определения критических точек вычислим $\mathcal{F}_x = 4x^3 - 2x$ и $\mathcal{F}_y = -4y^3 + 4y$.

5. Координаты точек, в которых касательные параллельны оси абсцисс, найдем, решив систему:

$$\begin{cases} \mathcal{F}(x, y) = x^4 + 2y^2 - x^2 - y^4 = 0 \\ \mathcal{F}_x(x, y) = 4x^3 - 2x = 0. \end{cases}$$

Имеем $M_{01}(0, \sqrt{2})$, $M_{02}(0, -\sqrt{2})$, $M_{1,2}\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}\right)$, $O(0, 0)$. В точке M_{01} будет y_{max}, так как $\mathcal{F}_{xx} \cdot \mathcal{F}_y > 0$, а в точках $M_{02}(0, -\sqrt{2})$ и $M_{1,2}$ будет минимум

(y_{min}), так как $\mathcal{F}_{xx} \cdot \mathcal{F}_y < 0$.
Координаты точек, в которых касательныепараллельны оси ординат, найдем, решив систему:

$$\begin{cases} \mathcal{F}(x,y) = x^4 + 2y^2 - x^2 - y^4 = 0 \\ \mathcal{F}_y = -4y^3 + 4y = 0. \end{cases}$$

Получим: $A_1(1,0),\ A_2(-1,0),\ O(0,0)$.
В точке A_1 будет x_{max}, так как $\mathcal{F}_{yy} \cdot \mathcal{F}_x > 0$, а точке A_2 будет x_{min}, так как $\mathcal{F}_{yy} \cdot \mathcal{F}_x < 0$.
6. Особые точки найдем из системы уравнений:

$$\begin{cases} \mathcal{F}(x,y) = x^4 + 2y^2 - x^2 - y^4 & = 0 \\ \mathcal{F}_x = 4x^3 - 2x & = 0 \Rightarrow \\ \mathcal{F}_y = -4y^3 + 4y & = 0 \end{cases}$$

Точка $O(0,0)$ — единственная особая точка. Так как $\delta = \mathcal{F}_{xy}^2 - \mathcal{F}_{xx} \cdot \mathcal{F}_{yy} > 0$, то точка $O(0,0)$ — узловая особая точка. Из уравнения $x^2 - 2y^2 = 0$, т.е. $x - \sqrt{2}y = 0$ и $x + \sqrt{2}y = 0$ — две касательные в этой точке.

7. Строим график функции (рис. 2.19).

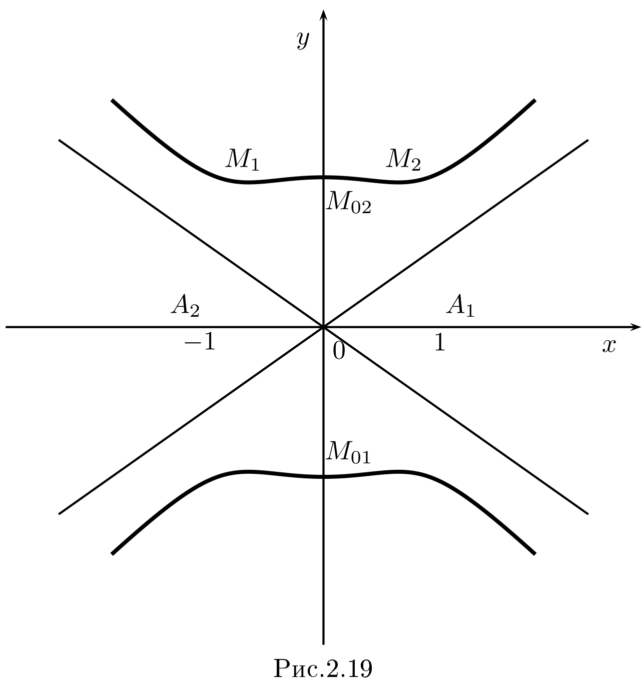


Рис.2.19

Иногда удобно исследовать и строить график неявно заданных функций , записав уравнение кривой в *параметрическом виде.*

Положим $y = \alpha(t)x^n$, где $\alpha(t)$ и n — выбранные подходящим образом функция и число. Подставляя выражение для y в уравнение $F(x,y) = 0$, получим $F(x, \alpha(t)x^n) = 0$.

Пусть $x = \varphi(t)$ — решение этого уравнения. Тогда

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \alpha(t)\varphi^n(t) \equiv \psi(t) \end{cases}$$

— параметрическое уравнение кривой.

На практике выбор функции $\alpha(t)$ определяется видом функции $\mathcal{F}(x, y)$. Это могут быть:

$$\text{а) } y = tx; \;\; \text{б) } y = \frac{t}{x}; \;\; \text{в) } y = x\sqrt{\operatorname{tg} t}$$

и другие подстановки.

Пример 2. Построить график кривой

$$x^2y^2 = x^3 - y^3$$

1. Запишем уравнение в параметрическом виде. Пусть $y = tx$, тогда $x^2t^2x^2 = x^3 - t^3x^3$, отсюда

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{t^2} - t \\ y = \dfrac{1}{t} - t^2 \end{cases}, \text{ причем } t \neq 0$$

Область определения функции $x(t)$ на интервале $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Функция $y(x)$ определена на интервале $(-\infty, +\infty)$.

2. Кривая симметрична относительно прямой $x+y = 0$, так как при замене y на $-x$, а x на $-y$ кривая $\mathcal{F}(x, y)$ не меняется.

3. Кривая не имеет ни вертикальных, ни горизонтальных асимптот, так как не выполняется одновременно ни одно из равенств а) или б):

$$\text{а) } \lim_{t\to 0\pm 0} y(t) = \infty, \;\; \lim_{t\to 0\pm 0} x(t) = x_0$$

$$\text{б) } \lim_{t\to 0\pm 0} x(t) = \infty, \;\; \lim_{t\to 0\pm 0} y(t) = y_0.$$

Хотя равенства $\lim\limits_{t\to 0\pm 0} x(t) = \infty$, $\lim\limits_{t\to 0\pm 0} y(t) = \infty$ выполняются одновременно, что говорит о возможном существовании наклонной асимптоты в виде $y = kx + b$, но так как $b = \lim\limits_{t\to 0\pm 0} [y(t) - kx(t)] = \infty$, то наклонной асимптоты график данной функции так же не имеет.

4. Не имеет кривая и двойных точек, так как не существуют двух различных значений t_1 и t_2 параметра таких, что

$$x_1 = x(t_1) = x(t_2), y_1 = y(t_1) = y(t_2).$$

5. Найдем первые производные

$$x'_t = -\frac{2+t^3}{t^3}, \;\; y'_t = -\frac{1+2t^3}{t^2}; \; y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{t(1+2t^3)}{2+t^3} \; (t \neq 0).$$

При $t=-\sqrt[3]{2}\approx -1,26$ $(x\approx 1,89,\ y\approx -2,38)$ производная не существует.
$y'_x=0$ при $t=-\sqrt[3]{1/2}\approx -0.79$ $(x\approx 2,38,\ y\approx -1,89)$
$y'_x<0$ при $-\infty<t<-\sqrt[3]{2}$ — функция убывает;
$y'_x>0$ при $-\sqrt[3]{2}<t<-\sqrt{1/2}$ — функция возрастает;
$y'_x<0$ при $-\sqrt{1/2}<t<0$ — функция убывает;
$y'_x>0$ при $0<t<+\infty$ — функция возрастает;

6. Найдем вторую производную y''_x: $y''_x=-\frac{2t^3(t^6+7t^3+1)}{(2+t^3)^3}$ $(t\neq 0)$. Из условия

$y''_x=0$, найдем $t=-\sqrt[3]{\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}}\approx -1,9$ $(x\approx 2,18,\ y\approx -4,14)$,

$t=-\sqrt[3]{\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}}\approx -0,53$ $(x\approx 4,14,\ y\approx -2,18)$.

$y''_x<0$ при $-\infty<t<-\sqrt[3]{\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}}$ — кривая выпуклая;

$y''_x>0$ при $-\sqrt[3]{\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}}<t<-\sqrt[3]{2}$ — кривая вогнутая ($t=-\sqrt[3]{2}$ — точка бесконечного разрыва);

$y''_x<0$ при $-\sqrt[3]{2}<t<-\sqrt[3]{\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}}$ — кривая выпуклая;

$y''_x>0$ при $-\sqrt[3]{2}<t<0$ — кривая вогнутая;
$y''_x<0$ при $0<t<+\infty$ — кривая выпуклая;
Точки перегиба: $P_1(2,18;-4,14)$, $P_2(1,89;-2,38)$, $P_3(4,14;-2,18)$.

7. Строим кривую согласно проведенному исследованию и продолжаем ее на всю область определения функции с учетом ее симметрии относительно биссектрисы $x+y=0$ (рис.2.20.).

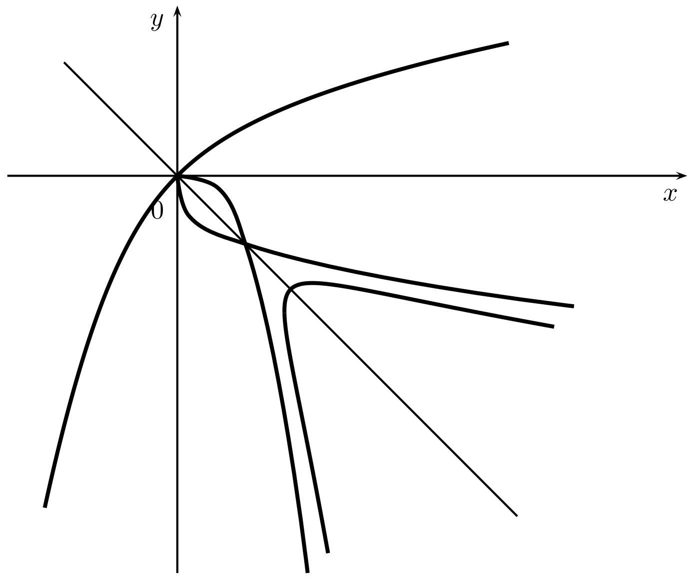


Рис.2.20

В некоторых случаях удобно исследовать и строить график неявно заданной функции, упростив уравнение кривой с помощью представления ее в полярной системе координат.

Пример 3. Построить график кривой

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

1. Запишем уравнение кривой в полярной системе координат.

$$\text{Пусть } \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi, \end{cases}$$

тогда уравнение примет вид $r = \dfrac{3a\sin 2\varphi}{2(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)}$.

2. Применив схему исследования линий, заданных в полярной системе координат и учтя особенности данной кривой, характерные точки и линии, построим ее график. Это — декартов лист (рис. 2.21).

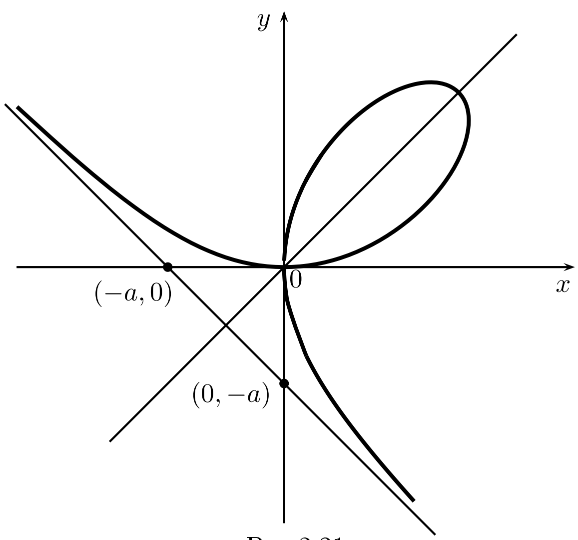


Рис.2.21

2.4 Функции, заданные в полярной системе координат

2.4.1 Схема исследования и построение графика функции с использованием замены переменной

Общий вид функций, заданных в полярной системе координат: $r = f(\varphi)$, а в неявном виде — $\mathrm{F}(r, \varphi) = 0$.

Функцию вида $r = f(\varphi)$ можно исследовать путем сравнения её с функцией, заданной в декартовой системе координат $y = f(x)$, которую получаем путем замены $r \to y$, $\varphi \to x$. И тогда к $y = f(x)$ можно применить схему исследования п.2.1.3.

Сравнивая график функции $r = f(\varphi)$ с соответствующим графиком функции $y = f(x)$, отметим его некоторые особенности.
Область определения $a \leq x \leq b$ функции $y = f(x)$ соответствует области

$a \le \varphi \le b$ определения функции $r = f(\varphi)$. Особым точкам $x_1, x_2, \ldots$ функции $y = f(x)$ соответсвуют точки $\varphi_1 = x_1$, $\varphi_2 = x_2, \ldots$ функции $r = f(\varphi)$.

Симметрия. 1) Пусть $y = f(x)$ — четная функция. Вследствие равенства $f(x) = f(-x)$ имеем, что точкам $A(x, y)$ и $B(-x, y)$ кривой $y = f(x)$ соответсвуют точки $A_1(r, \varphi)$ и $B_1(r, \pi - \varphi)$ кривой $r = f(\varphi)$ (рис.2.22а, б соответственно),

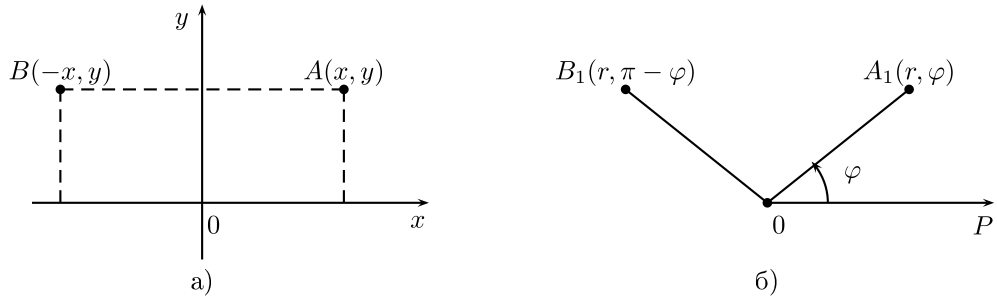


Рис.2.22

а точкам $A(x, -y)$ и $B(-x, -y)$ соответствуют точки $A_1(r, 2\pi - \varphi)$ и $B_1(r, \pi + \varphi)$ (рис.2.23а, б соответственно).

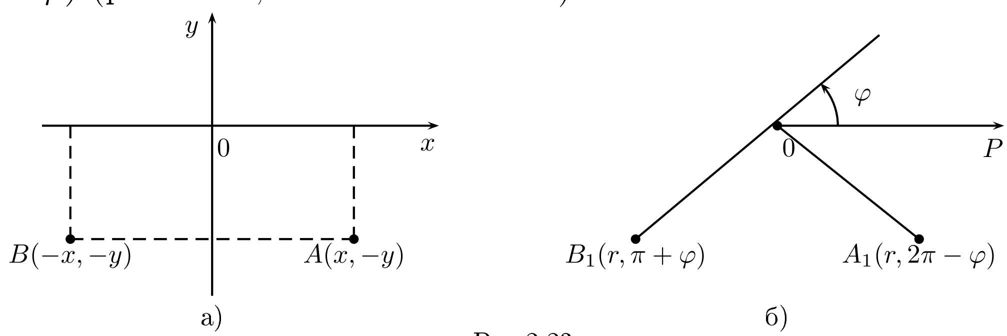


Рис.2.23

2) Пусть $y = f(x)$ — нечетная функция. Тогда точкам $A(x, y)$ и $B(-x, -y)$, симметричным относительно начала координат в декартовой системе координат, соответствуют точки $A_1(r, \varphi)$ и $B_1(r, \pi + \varphi)$, симметричные относительно полюса в полярной системе координат (рис.2.24а, б соответственно),

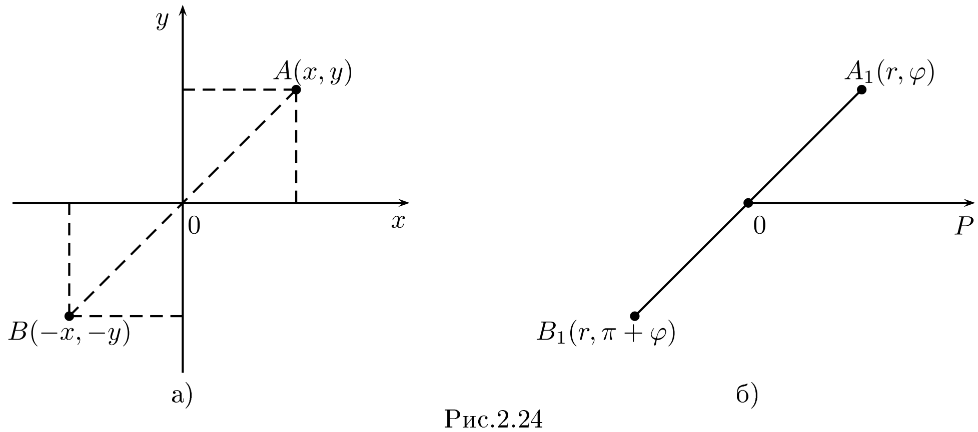


Рис.2.24

а точкам $A(-x, y)$ и $B(x, -y)$ кривой $f(x)$ соответствуют точки $A_1(r, \frac{\pi}{2} + \varphi)$ и $B_1(r, \frac{3\pi}{2} + \varphi)$ кривой $r = f(\varphi)$ (рис.2.25а, б соответственно).

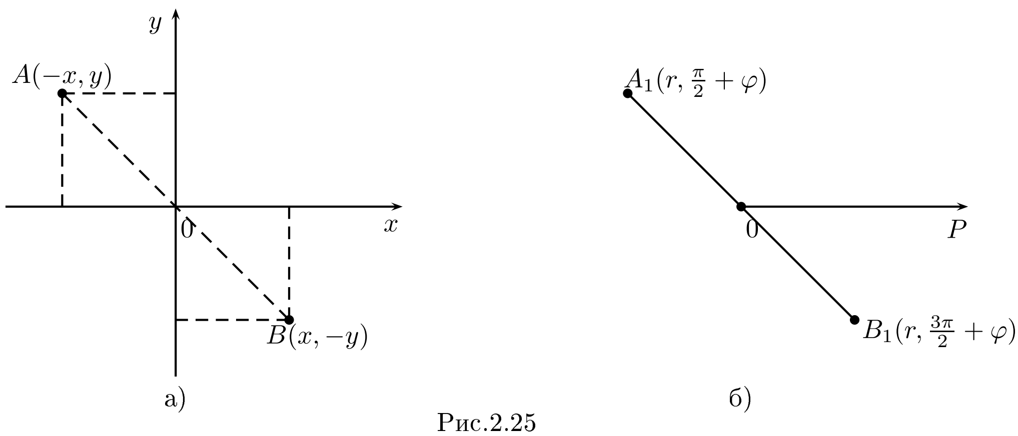


Рис.2.25

3) Если кривая $y = f(x)$ симметрична относительно оси абсцисс при $x > 0$, то точкам $A(x, y)$ и $B(x, -y)$ соответсвуют точки $A_1(r, \varphi)$ и $B_1(r, 2\pi - \varphi)$ кривой $r = f(\varphi)$ (рис.2.26а, б соответственно).

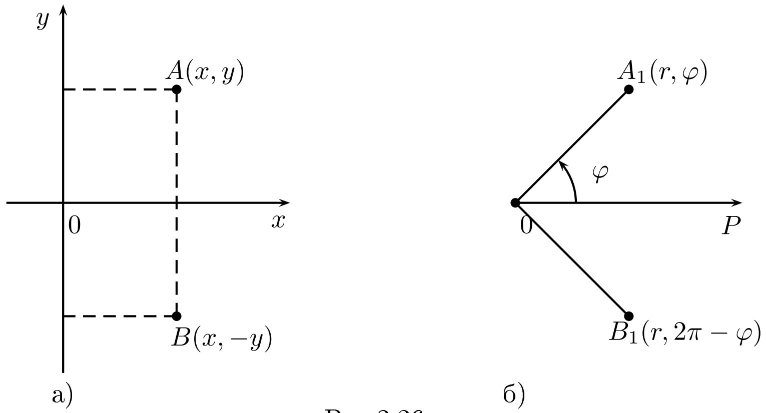


Рис.2.26

4) Если кривая $y = f(x)$ симметрична относительно оси абсцисс при $x < 0$, то точкам $A(-x, y)$ и $B(-x, -y)$ соответсвуют точки $A_1(r, \frac{\pi}{2}+\varphi)$ и $B_1(r, \frac{3\pi}{2}-\varphi)$ кривой $r = f(\varphi)$ (рис.2.27а, б соответственно).

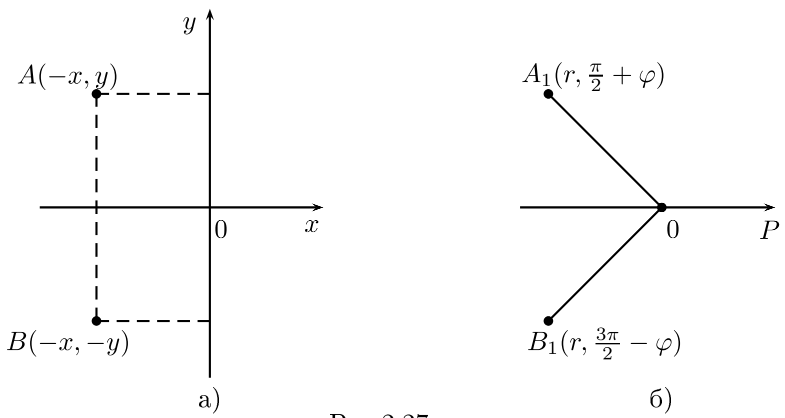


Рис.2.27

Период функции $y = f(x)$ такой же, как и период функции $r = f(\varphi)$. Поэтому достаточно построить график функции $r = f(\varphi)$ в секторе с углом у вершины, равным периоду, а затем с помощью постепенного поворота на углы, кратные периоду, строим искомый график.

Если функция $y = f(x)$ *ограничена* ($M < f(x) < N$), то, как известно, ее график располагается между прямыми $y = M$ и $y = N$. Для *соответствующей* функции $r = f(\varphi)$ справедливо неравенство $M < f(\varphi) < N$ и график функции $r = f(\varphi)$ располагается в *кольце*, внутренний радиус котрого равен M, а внешний — N.

Если функция $y = f(x)$ имеет *экстремум* при $x = x_0$, то функция $r = f(\varphi)$ имеет экстремум при $\varphi = \varphi_0$.

Если функция $f(x)$ *убывает* в некотором промежутке, то для функции $r = f(\varphi)$ при движении *по часовой стрелке* значение радиуса уменьшается, а при движении *против часовой стрелки* — увеличивается.

Горизонтальная асимптота $y = c$ кривой $y = f(x)$ переходит в *асимптотическую окружность* радиуса $r = c$ в полярной системе координат (если $c = 0$, то окружность вырождается в точку).

Веритикальная асимптота $x = b$ кривой $y = f(x)$ переходит в *луч* $\varphi = b$ в полярной системе координат. (Если $b = 0$, то асимптота $x = 0$ переходит в *полярную* ось, а если $b = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$, то асимптота $x = b$ переходит в вертикальный луч $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$).
Наклонная асимптота $y = kx + b$ кривой $y = f(x)$ переходит в *спираль Архимеда* $r = k\varphi + b$. Вчастности, *асиптота* $y = ax$ графика функции $y = f(x)$ переходит в *спираль Архимеда* $r = a\varphi$.

Замечание. Для построения графика функции $r = f(\varphi)$ при значениях φ, соответствующим таким значениям x, при которых $f(x) < 0$, достаточно построить график функции $y = |f(x)|$. Затем по этому графику необходимо построить кривую в полярной системе координат и повернуть её вокруг *полюса* на угол π. Получим кривую, соответствующую отрицательным значениям функции $r = f(\varphi)$. Следовательно, построение кривой $r = f(\varphi)$ необходимо вначале выполнить для φ, соответствующих значениям x, при которых $f(x) > 0$, а затем строить кривую $r = f(\varphi)$ для φ, соответствующих значениям x, при которых $f(x) < 0$.

Пример. Построить график функции $r = \dfrac{2}{\sqrt{\cos 3\varphi}}$.
Придерживаемся вышеизложенной схемы:

1. Заменяем $r \to y$, $\varphi \to x$, получаем функцию $y = \dfrac{2}{\sqrt{\cos 3x}}$;

2. К исследованию функции $y = \dfrac{2}{\sqrt{\cos 3x}}$ применим схему из п.2.1.3 и приведем некоторые сведения указанной функции, необходимые для построения её графика:

а) Функция определена для всех $x \neq \dfrac{\pi}{6}(2n + 1)$, где $n \in \mathbb{Z}$
б) Область значений функции $[2; +\infty)$
в) Функция периодическая с периодом $\dfrac{2\pi}{3}$

г) $y_{min} = 2$ при $x = 0$ и $x = \pm\dfrac{2\pi}{3}$

д) Функция имеет вертикальные асимптоты $x = \pm\dfrac{\pi}{6}$; $x = \pm\dfrac{\pi}{2}$; $x = \pm\dfrac{5\pi}{6}$; ...

3. Строим график функции $y = \dfrac{2}{\sqrt{\cos 3x}}$ (рис.2.28).

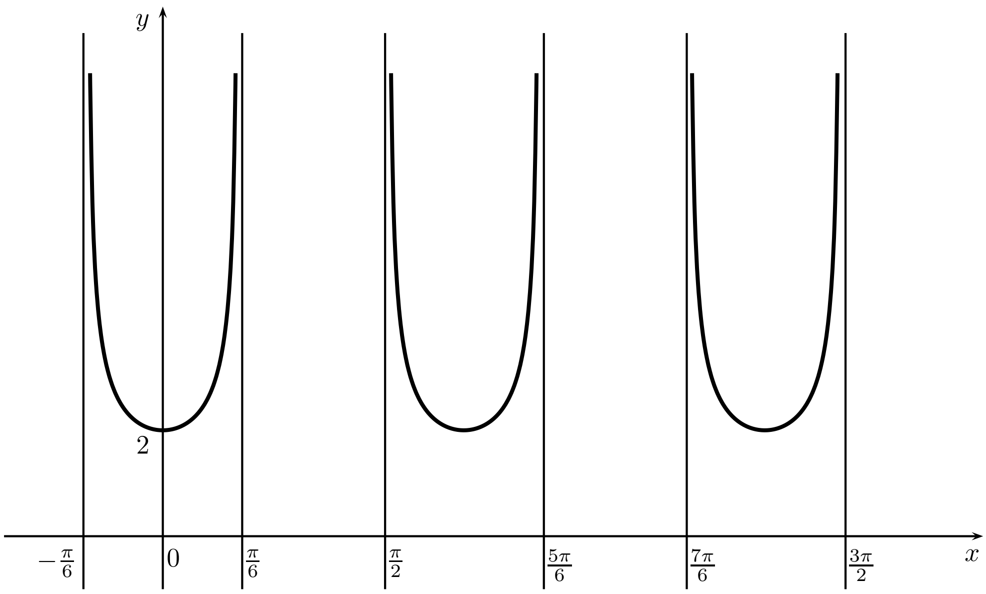


Рис.2.28

4. Согласно методике применения схемы строим график функции $r = \dfrac{2}{\sqrt{\cos 3\varphi}}$ в полярной системе координат, при этом вертикальные асимптоты переходят в лучи, а $y_{min} = 2$ — в асимптотическую окружность радиуса $r = 2$ (рис.2.29).

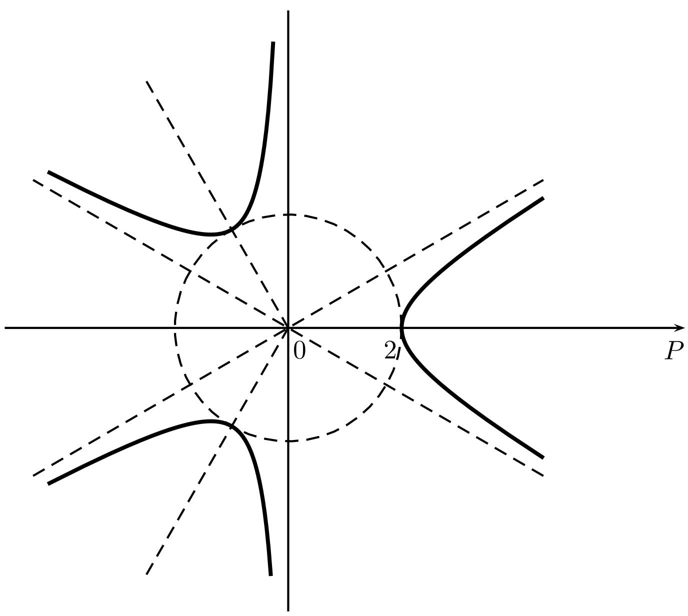


Рис.2.29

2.4.2 Общая схема исследования и построение графика функции с помощью производной

Теоритические сведения

Рассмотрим функцию вида $r = r(\varphi)$, где $-\infty < \varphi < +\infty$.

Условимся отрицательные значения r откладывать в направлении $\varphi + \pi$, т.е. в направлении, противоположном направлению, которое определено углом φ.

Если $r = r(\varphi)$ ограничена, т.е. значение $|r| \le a$, то вся кривая находится внутри круга радиуса $r = a$.

Если $r(-\varphi) = r(\varphi)$, то кривая симметрична относительно полярной оси; если $r(\pi - \varphi) = r(\varphi)$, то кривая симметрична относительно перпендикуляра к полярной оси (в полюсе); если $r(\pi + \varphi) = r(\varphi)$, то кривая симметрична относительно полюса.

Исследование на *экстремум* функции $r = r(\varphi)$ производится *обычным способом*: если $r'(\varphi) = 0$, $\varphi = \varphi_1$, то $r(\varphi_1)$ является r_{max}, если $r'(\varphi)$ при переходе через φ_1 меняет знак с "+"на "−"(или $r''(\varphi) < 0$); если $r'(\varphi)$ при переходе через φ_1 меняет знак с "−"на "+"(или $r''(\varphi) > 0$), то $r(\varphi_1)$ является r_{min}.

Касательные к кривым в точках r_{max} и r_{min} перпендикулярны к радиус-вектору точки касания.

Для того, чтобы найти на кривой $r = r(\varphi)$ точки, в которых *касательная* перпендикулярна к *полярной оси* (OP), необходимо в формуле $\operatorname{tg}\mu = \dfrac{r}{r'}$ (рис.2.30) положить $\mu = k\pi + \frac{\pi}{2} - \varphi$.

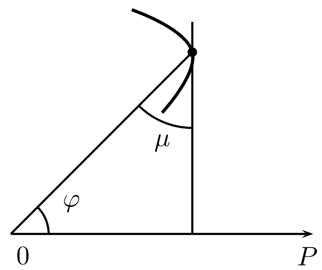


Рис.2.30

Значения φ, найденные из этого уравнения, и определяют искомые точки.

Если кривая $r = r(\varphi)$ имеет точки перегиба, то соответствующие значения φ должны быть корнями нечетной кратности уравнения:

$$r^2 + 2r'^2 - r'r'' = 0$$

Уравнение асимптоты в полярной системе координат:

$$r = \frac{\mathrm{p}}{\cos\varphi - \gamma},$$

где γ — угол, образованный перпендикуляром, опущенным на осимптоту из полюса O, с полярной осью; p — длина этого перпендикуляра (рис.2.31).

Для нахождения γ исследуют по уравнению заданной кривой $r = r(\varphi)$, существует ли такое значение $\varphi = \varphi_1$, для которого соответствующее значение

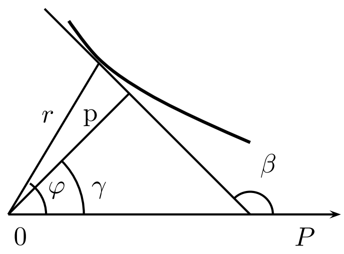


Рис.2.31

$r = \infty$. Если такое значение φ найдено, то кривая имеет бесконечную ветвь. В этом случае ищем P по формуле:

$$P = \lim_{\varphi \to \varphi_1} \frac{r^2}{|r'|}$$

Если этот предел существует, то бесконечная ветвь графика функции имеет асимптоту. А если предел не существует, то бесконечная ветвь кривой не имеет асимптоты (является параболической ветвью кривой). Если $P > 0$, то асимптота находится справа от радиус-вектора, который простирается в бесконечность, а если $P < 0$ — то слева.

Пример. Построить график функции $r = 1 + \cos\dfrac{\varphi}{2}$.

Исследование функции, заданной в полярной системе координат, и построение ее графика проведем используя общую схему (п.2.1.3) и теоритические сведения данного пункта.

1. Область определения: $\varphi \in \mathbb{R}$.

2. Функция периодична с периодом $T = 4\pi$. Так как $r(-\varphi) = 1 + \cos\dfrac{(-\varphi)}{2} = 1 + \cos\dfrac{\varphi}{2} = r(\varphi)$, то функция — четная и её график симметричен относительно полярной оси.

Наклонных асимптот кривая $r(\varphi) = 1 + \cos\dfrac{\varphi}{2}$ не имеет, так как

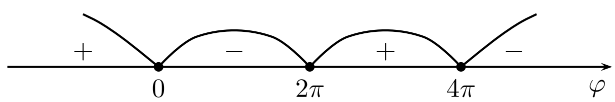
$k = \lim\limits_{\varphi \to \infty} \dfrac{r(\varphi)}{\varphi} = \nexists$ (не существует) и $b = \lim\limits_{\varphi \to \infty} [r(\varphi) - k(\varphi)] = \nexists$.

Вертикальных асимптот также нет.

3. Находим интервалы монотонности и экстремумы.

$$r' = -\frac{1}{2}\sin\frac{\varphi}{2} = 0 \Rightarrow \ \sin\frac{\varphi}{2} = 0 \quad \frac{\varphi}{2} = \pi k, \ \ \varphi = 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}$$

Так как $0 \le \varphi \le 4\pi, \ k = 0, 1, 2$, то $\varphi_1 = 0, \ \varphi_2 = 2\pi, \ \varphi_3 = 4\pi$, где $\varphi_1, \ \varphi_2, \ \varphi_3$ — стационарные точки. Исследуем знак производной в окрестностях этих точек.



Значит, на $[0; 2\pi]$ функция $r(\varphi)$ убывает, а на $[2\pi; 4\pi]$ возрастает. $\varphi_{min} = 2\pi k$ — точки минимума, где $k = 2n + 1, \ n \in \mathbb{Z}$. $\varphi_{max} = 2\pi k$ — точки максимума, где $k = 2n,\ n \in \mathbb{Z}$.

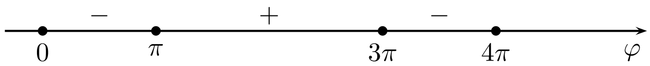
$$r_{max} = r(\varphi_{max}) = 2;\ r_{min} = r(\varphi_{min}) = 1$$

5. Находим интервалы сохранения направления выпуклости и точки перегиба.

$$r'' = (r')' = (-\frac{1}{2}\sin\frac{\varphi}{2})' = -\frac{1}{4}\cos\frac{\varphi}{2}\ r'' = 0$$

$$\cos\frac{\varphi}{2} = 0 \quad \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m \Rightarrow \varphi = \pi + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$$

Так как $0 \le \varphi \le 4\pi$, то $m = 0, 1:\ \varphi_1 = \pi,\ \varphi_2 = 3\pi$.



Вывод: на $[\pi; 3\pi]$ — график вогнутости функции; на $[0; \pi] \cup [3\pi; 4\pi]$ — график выпуклости функции.

Так как в окрестности точек $\varphi_1 = \pi$ и $\varphi_2 = 3\pi$ происходит смена знака r'', то эти точки являются точками перегиба ($\varphi = \pi + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$ для общего случая).

6. Определяем точки пересечения функции с полярной осью.

$$r = 0;\ 1 + \cos\frac{\varphi}{2} = 0$$

$$\cos\frac{\varphi}{2} = -1 \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$$

$$\varphi = 2\pi + 4\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$$

С учетом периодичности точка пересечения с осью $(2\pi; 0)$.

7. Так как график функции не имеет наклонных асимптот, то исследуем поведение функции $r(\varphi)$ при $\varphi \to +\infty$

$$\lim_{\varphi \to +\infty} r(\varphi) = \lim_{\varphi \to +\infty} (1 + \cos\frac{\varphi}{2}) = \nexists$$

8. Строим график функции (рис.2.32).

Из графика видно, что верхняя ветвь кривой соответствует измнению аргумента φ на отрезке $[0; 2\pi]$, а нижняя — $[2\pi; 4\pi]$.

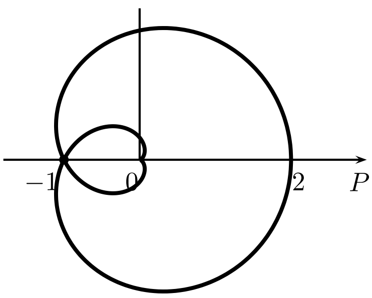


Рис.2.32

Приложение А Построение графиков некоторых функций с помощью геометрических преобразований

(?) I. Рассмотрим некоторые правила простейших преобразований графиков, т.е. из играфика $y = f(x)$, как получить графики следующих функций.

1) График функции $y = f(x - a)$.

Правило. График функции $y = f(x - a)$ (сплошная линия) ($y = f(x + a)$) получается из графика функции $y = f(x)$ (пунктирная) сдвигом последнего вдоль ось Ox на a единиц вправо (влево), где $a > 0$ (рис.1).

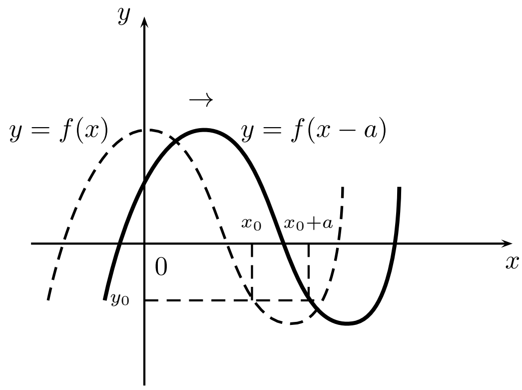


Рис.1

2) График функции $y = f(x) + b$.

Правило. Если все точки графика $y = f(x)$ функции сдвинуть параллельно оси Oy на $b > 0$ единиц вверх (вниз), то новая кривая будет графиком функции $y = f(x) + b$ ($y = f(x) - b$) (рис.2).

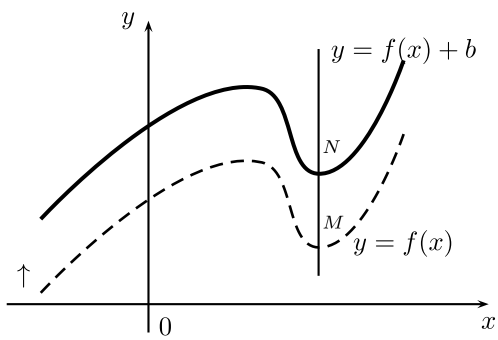


Рис.2

Примечание. Оба правила 1) и 2) можно объединить в одно, т.е график функции $y = f(x - a) + b$ получается из графика функции $y = f(x)$ путем двух параллельных сдвигов: вдоль оси Ox на $|a|$ единиц (вправо, если $a > 0$, и влево, если $a < 0$) и затем вдоль оси Oy на $|b|$ единиц (вверх, если $b > 0$, и вниз, если $b < 0$).

3) График функции $y = f(ax)$.

Правило. График функции $y = f(ax)$, где $a > 0$ получается из графика функции $y = f(x)$ сжатием последнего вдоль оси Ox с коэффициентом сжатия, равным a (рис.3).

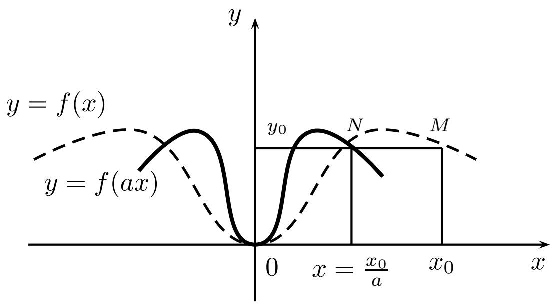


Рис.3

4) График функции $y = bf(x)$.

Правило. График функции $y = bf(x)$, где $b > 0$ получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением последнего вдоль оси Оy с коэффициентом сжатия, равным b (рис.4).

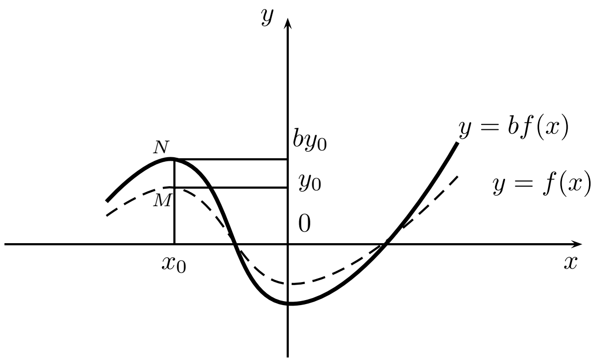


Рис.4

Замечание. При $a < 1$; $\frac{x}{a} > x$, т.е абсцисса x увеличивается и график функции растягивается, а не сжимается. Аналогично $by < y$, если $b < 1$,т.е ордината уменьшается (кривая сжимается к оси Ox, а не растягивается).

В любом случае: умножение на число называется *растяжением*, а деление — *сжатием.*

5) График функции $y = f(-x)$.

Правило. График функции $y = f(-x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ симметричным отображением последнего относительно оси Оy (рис.5).

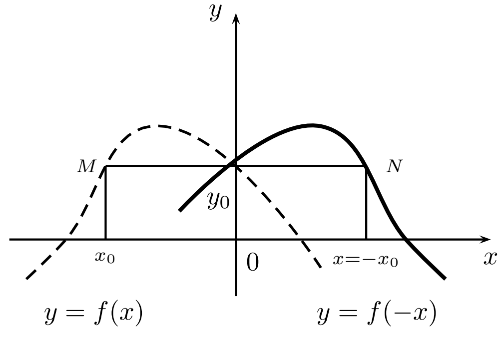


Рис.5

6) График функции $y = -f(x)$.

Правило. График функции $y = -f(x)$ получается симметричным отображением графика функции $y = f(x)$ относительно оси Ox(рис.6).

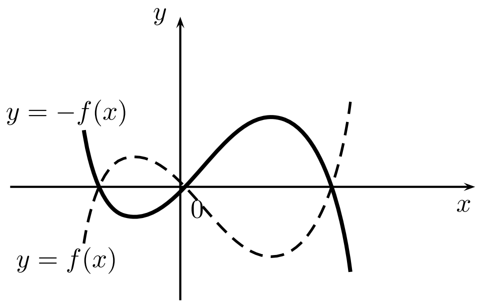


Рис.6

7) График дробно-линейной функции $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}(*)$, где a, b, c, d — постоянные, $c \neq 0$, $ad \neq bc$.

Для построения графика дробно-линейной функции преобразуем правую часть равенства (*):

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a\left(x+\dfrac{d}{c}-\dfrac{d}{c}\right)+b}{c\left(x+\dfrac{d}{c}\right)} = \frac{a\left(x+\dfrac{d}{c}\right)+\left(b-\dfrac{d}{c}\right)}{c\left(x+\dfrac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c} + \frac{\dfrac{bc-ad}{c^2}}{x+\dfrac{d}{c}} =$$

$$= \left[\text{Обозначим: } k = \frac{bc-ad}{c^2},\ m = \frac{d}{c},\ n = \frac{a}{c}\right] = n + \frac{k}{x+m}$$

Правило. График функции $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}(*)$ $\left(n + \dfrac{k}{x+m}\right)$ можно получить из графика функции $y = n + \dfrac{k}{x+m}$ сдвигом гиперболы $y = \frac{k}{x}$ на |m| единиц вдоль оси Ox и на |n| единиц вдоль оси Oy в том или ином направлении в зависимости от знаков m и n. При сдвиге асимптоты(координатные оси) гиперболы перейдут в прямые $x = -m$
$(x = -\frac{d}{c})$ и $y = n$ $(y = \frac{a}{c})$.

Для более точного построения графика функции (*) целесообразно найти точки его пересечения с координатными осями.

Пример. Построить график функции $y = \dfrac{4x+1}{2x+3}$ (1).
В (1) $a = 4,\ b = 1,\ c = 2,\ d = 3$. Выделяя целую часть, имеем $y = 2 + \frac{7/2}{x-3/2}$, где $x = \frac{3}{2}$, $y = 2$ — асимптоты гиперболы.
Находим точки пересечения графика функции с осями координат: $x = 0$, $y = -\frac{1}{3}$; $y = 0$, $x = -\frac{1}{4}$.
Взяв еще несколько «контрольных »точек, строим график исходной функции (рис.7).

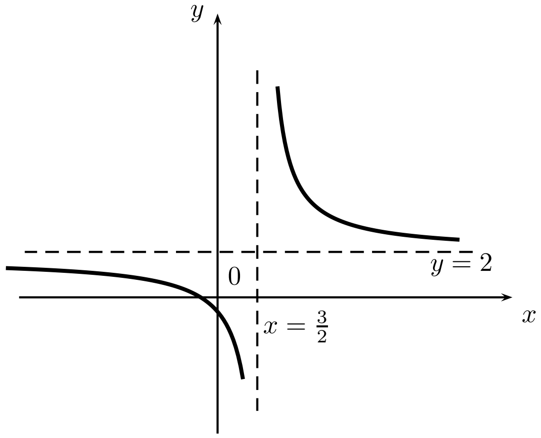


Рис.7

8) График функции $y = f(|x|)$.

Правило. График функции $y = f(|x|)$ в правой полуплоскости $(x \geq 0)$ $f(|x|) \equiv f(x)$ ($y = f(|x|)$ — функция четная), а в левой полуплоскости $(x < 0)$ симметричен этой части графика относительно оси Оу (рис.8).

Пример. Построить график функции $y = |x|$.

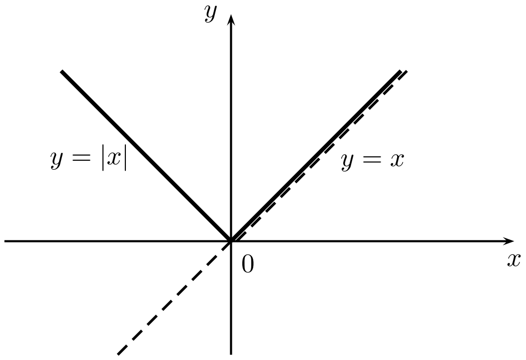


Рис.8

9) График функции $y = |f(x)|$.

Согласно определению абсолютной величины действительного числа имеем:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0 \end{cases}$$

Правило. График функции $y = |f(x)|$ совпадает с графиком функции $y = f(x)$ для тех участков Ох, где $f(x) \geq 0$ и является симметричным отбражением его относительно оси Ох для тех участков, где $f(x) < 0$ (рис.9).

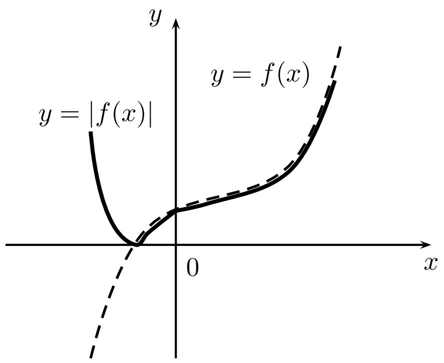


Рис.9

II. Построение графика функции $y = f(x)$ с использованием «цепочки» функций.

Пусть функцию $y = f(x)$ можно представить в виде «цепочки» функций $y = f_1(x),\ y = f_2(x),\ \ldots,\ y = f_n(x)$ таким образом, что две соседние функции $y = f_k(x)$ и $y = f_{k+1}(x)$ отличались бы друг от друга каким-нибудь из разобранных признаков, а график последней функции «цепочки» был бы известен.

Затем последовательно строим графики функций $y = f_n(x)$, $y = f_{n-1}(x)$, …, $y = f(x)$, получая каждый следующий график из предыдущего по известному правилу.

Такие построения в отдельных случаях(во избежание нагромождения графиков) удобнее производить на отдельных рисунках.
«Цепочку» можно составлять по-разному, но лишь таким образом, чтобы переход от одной функции к другой каждый раз подчинялся какому-нибудь из расмотренных правил.
Пример. Построить графики следующих функций:

1. $y = -\sqrt{x^2 - 4x + 4} = -\sqrt{(x-2)^2} = -|x-2|$

Составим «цепочку», например, таким образом:

$$\begin{array}{lll} y = -|x-2| & (y \to -y) & (3) \\ y = |x-2| & (f(x) \to |f(x)|) & (2) \\ y = x - 2 & & (1) \end{array}$$

Примечание. Здесь и в дальнейшем в скобках указывается в сокращенных обозначениях то правило, по которому график этой функции получается из графика последующей функции.

Теперь согласно этим правилам строим последовательно графики: 1), 2), 3) (рис.10).

Можно было «цепочку» составить следующим образом (рис.11):

$$\begin{array}{lll} y = -|x-2| & (x \to x-2) & 3) \\ y = -|x| & (x \to |x|) & 2) \\ y = -x & & 1) \end{array}$$

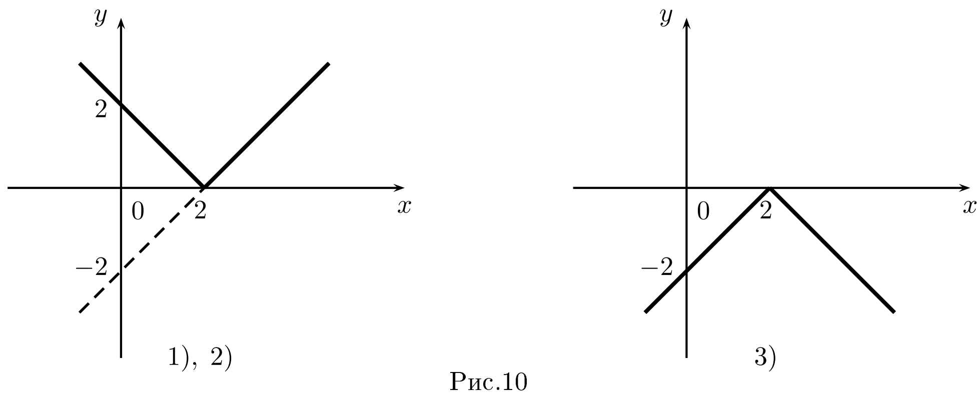


Рис.10

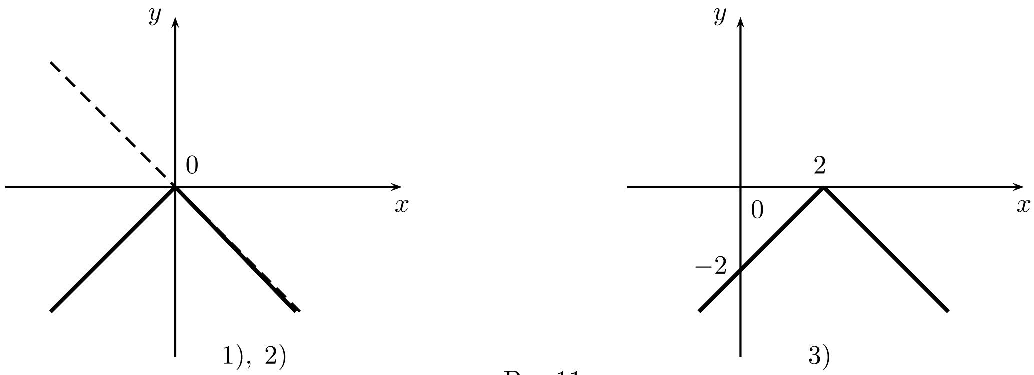


Рис.11

2. $y = \sqrt{-x} - 1$
Составим «цепочку» :

$$\begin{array}{lll} y = \sqrt{-x} - 1 & (y \to y + 1) & 3) \\ y = \sqrt{-x} & (x \to -x) & 2) \\ y = \sqrt{x} & & 1) \end{array}$$

Строим последоваетльно графики 1)- 3) (рис.12).

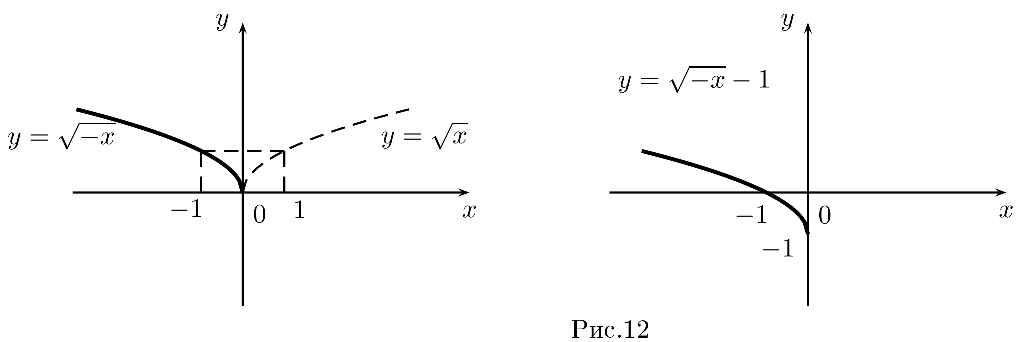


Рис.12

3. $x = \sqrt{1 - y} + 1$
Выразим y как функцию x, выполнив соответствующие преобразования:
$x - 1 = \sqrt{1 - y}$ ($x - 1 \geq 0$, т.е. $x \geq 1$, так как арифметический корень не может принимать отрицательные значения).

Окончательно получим: $y = -(x-1)^2+1$. Графиком этой функции будет парабола(рис.13), а графиком исходной функции будет правая ветвь параболы, для которой $x \geq 1$.

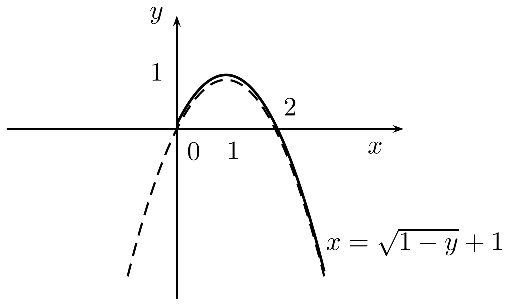


Рис.13

4. $y = (1-x)^3$.

Составим «цепочку», например, так (рис.14):

$$
\begin{array}{lll}
y = (1-x)^3 & (x \to -x) & 3)\\
y = (1+x)^3 & (x \to 1+x) & 2)\\
y = x^3 & & 1)
\end{array}
$$

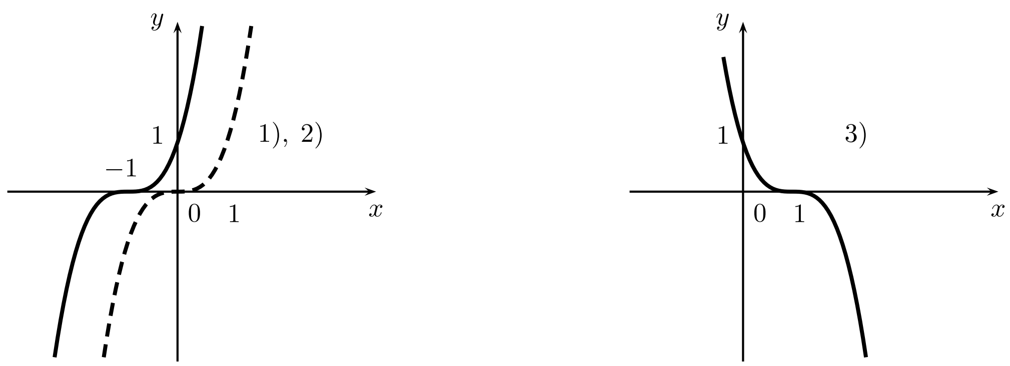


Рис.14

5. $y = 3^{|x+1|} - 1$

Составим «цепочку», например, так :

$$
\begin{array}{lll}
y = 3^{|x+1|} - 1 & (x \to x+1,\ y \to y+1) & 3)\\
y = 3^{|x|} & (x \to |x|) & 2)\\
y = 3^{x} & & 1)(\text{рис.15})
\end{array}
$$

6. $y = \log_{1/3}(x+1)^2$.

Эту функцию можно предствить как $y = 2\log_{1/3}|x+1|$ ($\log_{1/3}(x+1)^2$ имеет смысл и при $x+1<0$).

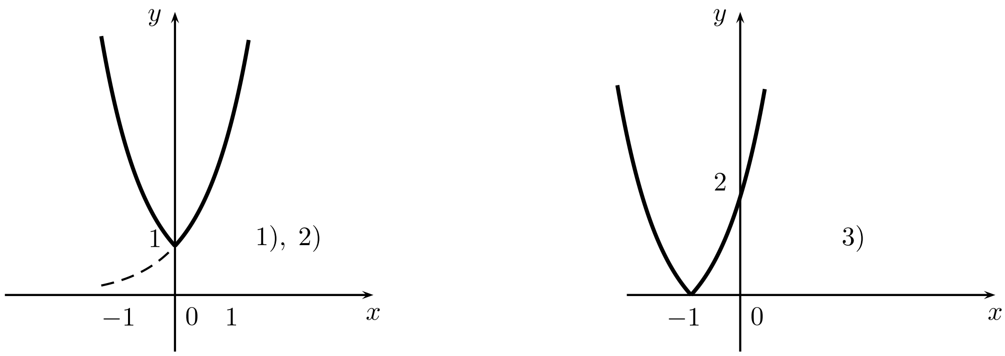


Рис.15

Составим «цепочку»:

$$
\begin{array}{lll}
y = 2\log_{\frac{1}{3}}|x+1| & (x \to x+1) & 4) \\
y = 2\log_{\frac{1}{3}}|x| & (x \to |x|) & 3) \\
y = 2\log_{\frac{1}{3}} x & (y \to \dfrac{y}{2}) & 2) \\
y = \log_{\frac{1}{3}} x & & 1)
\end{array}
$$

Строим последовательно графики функций 1)- 4) (рис.16).

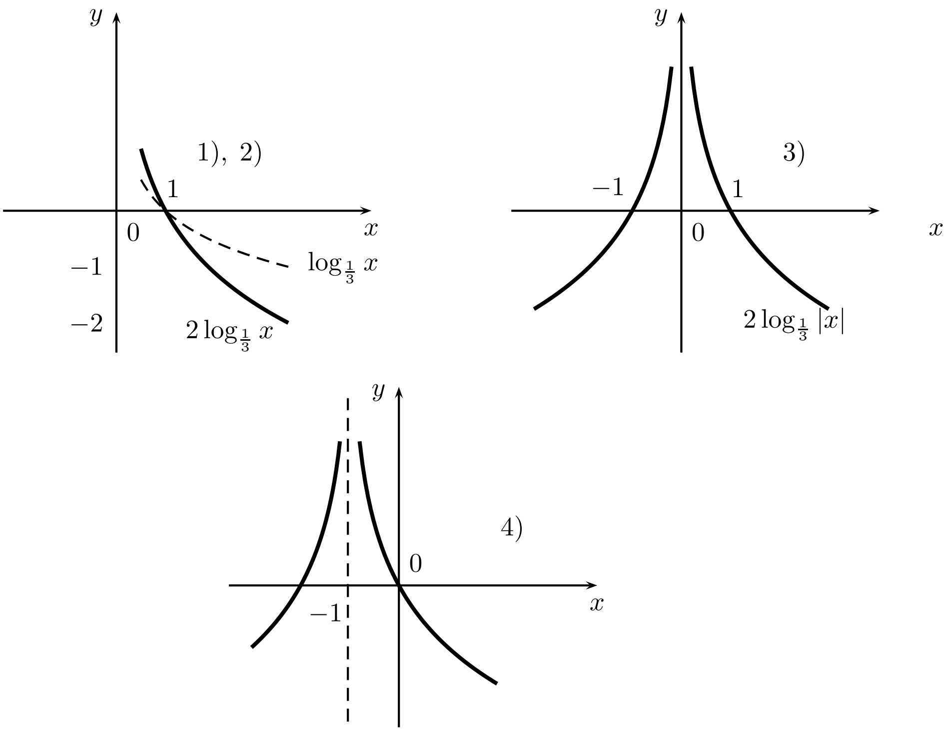
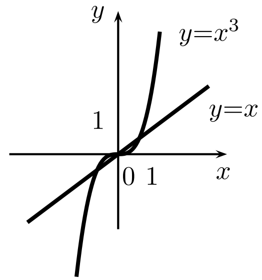
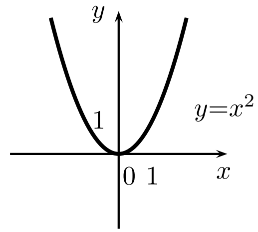
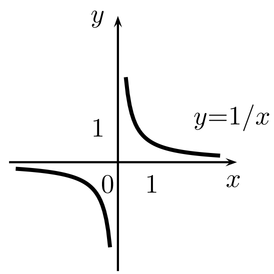
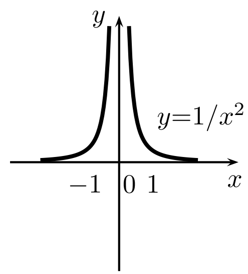
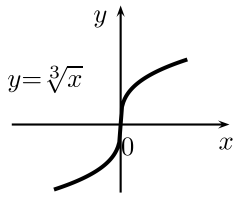
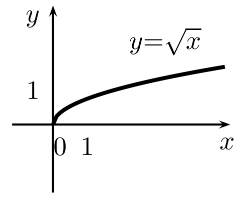
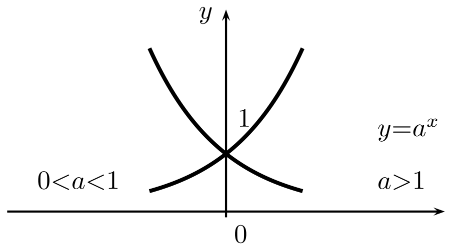
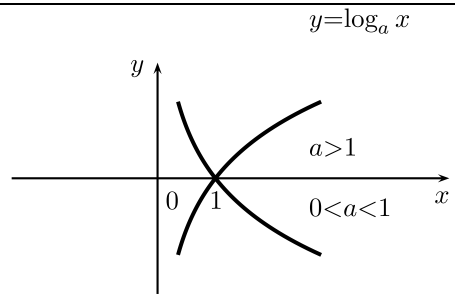
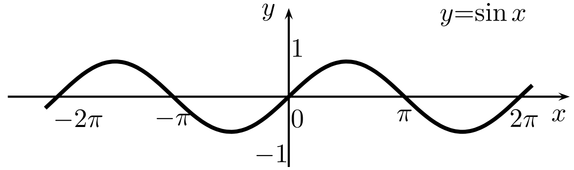
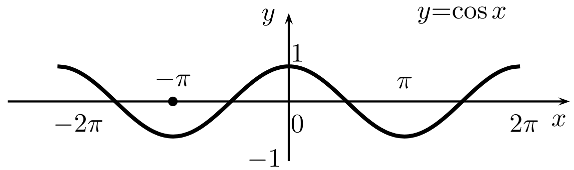
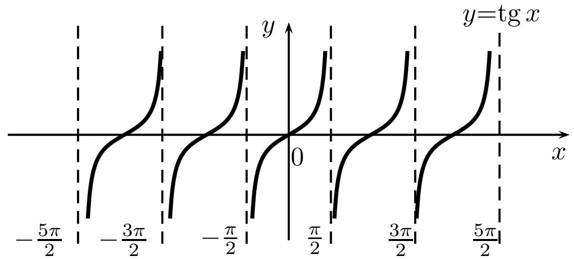
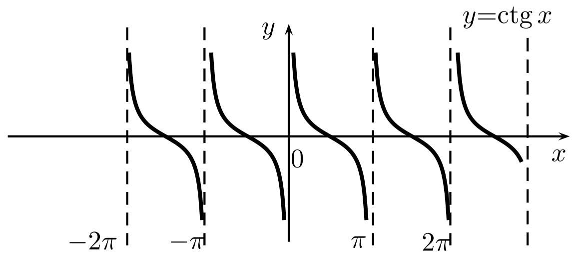


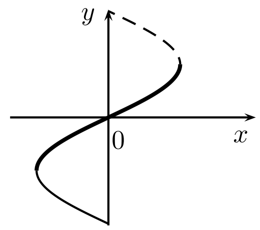
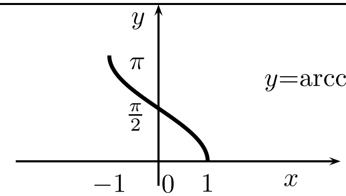
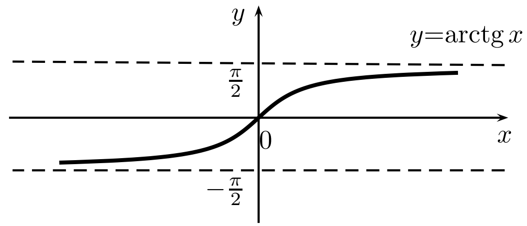
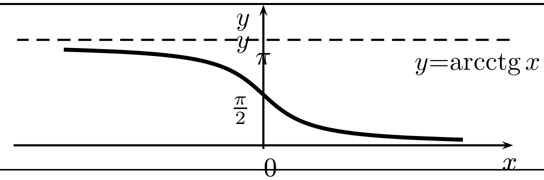
Рис.16

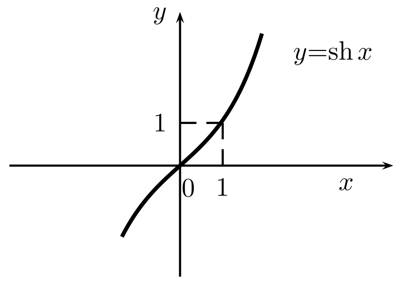
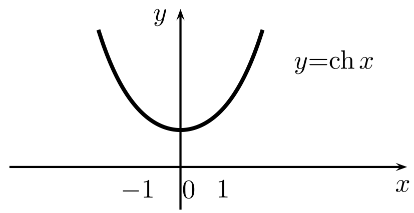
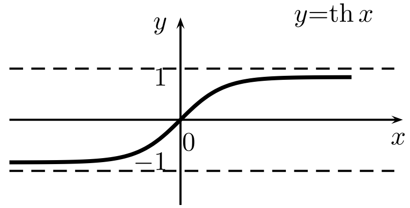
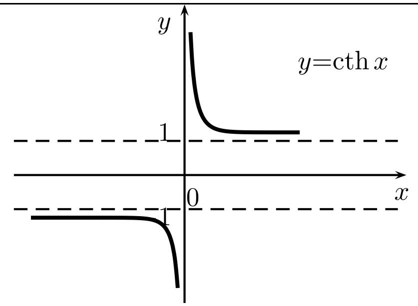
Приложение Б Элементарные функци

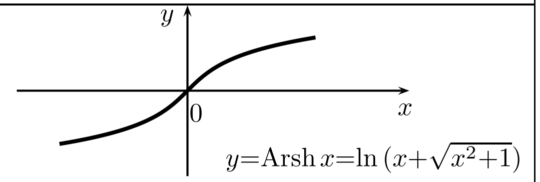
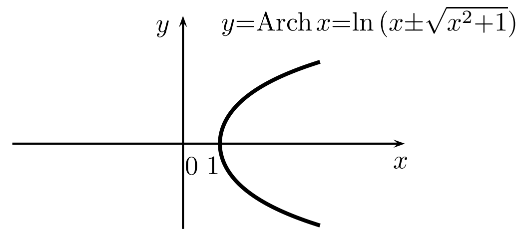
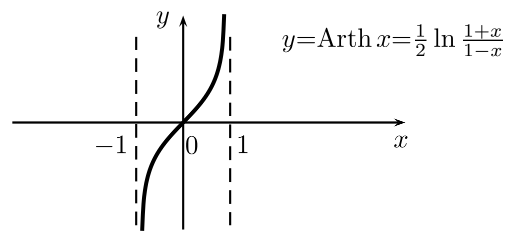
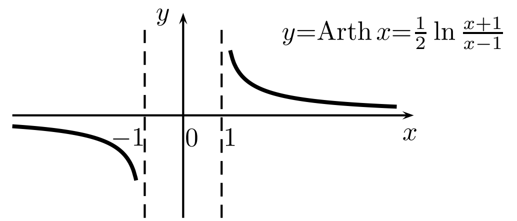
№ п/п	Обозначение функции	Область определения функции X	Область значений функции Y	Четность, нечетность	Монотонность	Периодичность	График функции
1	2	3	4	5	6	7	8
				1.Степенная функция			
1	$y = x^n$ $n \in \mathbb{N}$	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \infty)$, если n — нечетно; $[0; \infty)$, если n — четно	нечетная, если n — нечетно; четная, если n — четно	возрастает на $(-\infty, \infty)$, если n — нечетно; убывает на $(-\infty, 0]$, возрастает на $(0; \infty)$, если n — четно	непериодическая	 
2	$y = x^{-n}$ $n \in \mathbb{N}$	$(-\infty, 0) \cup$ $\cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup$ $\cup (0, \infty)$, если n — нечетно; $[0; \infty)$, если n — четно	нечетная, если n — нечетно; четная, если n — четно	убывает на $(-\infty, 0)$ и на $(0, \infty)$, если n — нечетно; возрастает на $(-\infty, 0)$ и убывает на $(0, \infty)$, если n — четно	непериодическая	 

1	2	3	4	5	6	7	8
3	$y = \sqrt[n]{x}$ $n \in \mathbb{N}$ $n > 1$	$(-\infty, \infty)$, если n — нечетно; $[0, \infty)$, если n — четно	$(-\infty, \infty)$, если n — нечетно; $[0; \infty)$, если n — четно	нечетная, если n — нечетно; четная, если n — четно	возрастает на $(-\infty, \infty)$, если n — нечетно; возрастает на $[0, -\infty)$, если n — четно	непериодическая	 
			2.Показательная функция				
4	$y = a^x$ $(a > 0,$ $a \neq 1)$	$(-\infty, \infty)$	$(0, \infty)$	общего вида	возрастает на $(-\infty, \infty)$, если $a > 1$; убывает на $(-\infty, \infty)$, если $0 < a < 1$	непериодическая	
			3.Логарифмическая функция				
5	$y = \log_a x$ $(a > 0,$ $a \neq 1)$	$(0, \infty)$	$(-\infty, \infty)$	общего вида	возрастает на $(0, \infty)$, если $a > 1$; убывает на $(0, \infty)$, если $0 < a < 1$	непериодическая	

1	2	3	4	5	6	7	8
				4. Тригонометрические функции			
6	$y = \sin x$	$(-\infty, \infty)$	$[-1; 1]$	нечетная	возрастает на $[-\pi/2 + 2\pi n, \pi/2 + 2\pi n]$; убывает на $[\pi/2+2\pi n, 3\pi/2 + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$	период $T = 2\pi$	
7	$y = \cos x$	$(-\infty, \infty)$	$[-1; 1]$	четная	возрастает на $[-\pi + 2\pi n, 2\pi n]$; убывает на $[2\pi n, \pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$	период $T = 2\pi$	
8	$y = \operatorname{tg} x$	$(-\pi/2 + \pi n, \pi/2 + \pi n)$ $n \in \mathbb{Z}$	$(-\infty, \infty)$	нечетная	возрастает на $[-\pi/2 + \pi n, \pi/2 + \pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$	период $T = \pi$	
9	$y = \operatorname{ctg} x$	$(\pi n, \pi + \pi n)$ $n \in \mathbb{Z}$	$(-\infty, \infty)$	нечетная	убывает на $[\pi n, \pi + \pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$	период $T = \pi$	

1	2	3	4	5	6	7	8
		5.Обратные тригонометрические функции					
10	$y = \arcsin x$	$[-1; 1]$	$[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$	нечетная	возрастает на $[-1, 1]$		
11	$y = \arccos x$	$[-1, 1]$	$[0; \pi]$	общего вида	убывает на $[-1, 1]$		
12	$y = \operatorname{arctg} x$	$(-\infty, \infty)$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	нечетная	возрастает на $(-\infty, \infty)$		
13	$y = \operatorname{arcctg} x$	$(-\infty, \infty)$	$(0, \pi)$	общего вида	убывает на $(-\infty, \infty)$		

1	2	3	4	5	6	7	8
		6. Гиперболические функции					
14	$y = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \infty)$	нечетная	возрастает на $(-\infty, \infty)$	непериодическая	
15	$y = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	$(-\infty, \infty)$	$(0, \infty)$	четная	возрастает на $(0, \infty)$, убывает на $(-\infty, 0)$	непереодическая	
16	$y = \operatorname{th} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	$(-\infty, \infty)$	$(-1, -1)$	нечетная	возрастает на $(-\infty, \infty)$	непереодическая	
17	$y = \operatorname{cth} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$	нечетная	убывает на $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	непереодическая	

1	2	3	4	5	6	7	8
		7. Обратные гиперболические функции					
18	$y = \operatorname{Arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \infty)$	нечетная	возрастает на $(-\infty, \infty)$	непереодическая	
19	$y = \operatorname{Arch} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2+1})$	$[1, \infty)$	$(-\infty, 0]$, $[0, \infty)$	двузначная	1-я ветвь на $[1, \infty)$: $(-\infty, 0]$, 2-я ветвь на $[1, \infty)$: $[0, \infty)$	непереодическая	
20	$y = \operatorname{Arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$	$(-1, 1)$	$(-\infty, \infty)$	нечетная	возрастает на $(-1, 1)$	непереодическая	
21	$y = \operatorname{Arcth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{x-1}$	$(-\infty, -1)$ $\cup(1, \infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, \infty)$	нечетная	убывает на $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$	непереодическая	

Приложение В Перечень индивидуальных заданий по построению графиков функций

1. Исследовать и построить графики функций, заданных в таблице 1.

Таблица 1

Вариант	задание функций	
	а)	б)
1	$y = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$	$y = (1+x)^{1/x}$
2	$y = \arccos \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$	$y = (1+\dfrac{1}{x})^x$
3	$y = (1-x^2)^{-1}$	$y = \arcsin(\sin x)$
4	$y = x^4(1+x)^{-3}$	$y = \sin(\arcsin x)$
5	$y = (1+x)^4(1-x)^{-4}$	$y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$
6	$y = x^2(x-1)(x+1)^{-2}$	$y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$
7	$y = x(1-x^2)^{-2}$	$y = (x+2)e^{1/x}$
8	$y = 2x - 1 + (x+1)^{-1}$	$y = 2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$
9	$y = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$	$y = x^{1/x}$
10	$y = x - 2\operatorname{arctg} x$	$y = x(1+\dfrac{1}{x})^x \ (x>0)$
11	$y = \dfrac{x^2+4}{x^2-4}$	$y = x \sin x$
12	$y = \dfrac{e^x}{x}$	$y = e^x \sin x$
13	$y = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$	$y = \dfrac{\ln x}{x}$
14	$y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2+1}$	$y = e^{-x} \cos x$
15	$y = x^3 + \dfrac{x^4}{4}$	$y = \dfrac{e^x}{x}$
16	$y = 2x + 1 + \dfrac{1}{x^2}$	$y = 2^{\lvert x\rvert}$
17	$y = \dfrac{x^2-5}{x-3}$	$y = \arcsin(x-1)$
18	$y = x + \dfrac{1}{x^2} \ , x \neq 0$	$y = \lvert x^2-1\rvert$
19	$y = \ln(x^2+1)$	$y = \lvert\log_a x\rvert \ (a>1)$
20	$y = \dfrac{1-2x}{(x-1)^2}$	$y = \lvert\log_2 \lvert x\rvert\rvert$
21	$y = x^2 + \frac{1}{x}$	$\lvert y\rvert = \lvert x-1\rvert$
22	$y = \frac{x}{3-x^2}$	$y = 1 + x^2 - 0,5x^4$

2. Построить графики функций, заданных в таблице 2.

Таблица 2

Вариант	задание функций	Вариант	задание функций
1	$x = \left(\dfrac{t+1}{2}\right)^2; \quad y = \left(\dfrac{t-1}{2}\right)^2$	12	$x = \dfrac{a}{\cos^3 t}; \quad y = a\,\mathrm{tg}^3\, t \ (a > 0)$
2	$x = \dfrac{t^2}{1-t^2}; \quad y = \dfrac{1}{1+t^2}$	13	$x^2y^2 + y = 1$
3	$x = \dfrac{t}{1-t^2}; \quad y = \dfrac{t(1-2t^2)}{1-t^2}$	14	$x^3y^3 - y = 1$
4	$x = 2t - t^2; \quad y = 3t - t^3$	15	$x^4 + y^4 = 2xy$
5	$x = \dfrac{1}{4}(t+1)^2; \quad y = \dfrac{1}{4}(t-1)^2$	16	$x^3 + y^3 + 3axy \ \ (a > 0)$
6	$x = \dfrac{t^2}{t-1}; \quad y = \dfrac{1}{t^2-1}$	17	$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \ \ (a > 0)$
7	$x = \dfrac{t^2+1}{4(1-t)}; \quad y = \dfrac{t}{t+1}$	18	$x^4 + 2y^3 = 4x^2y$
8	$x = \dfrac{(t+2)^2}{t+1}; \quad y = \dfrac{(t-2)^2}{t-1}$	19	$x^2y^2 + y = 1$. Положить $y = \frac{t}{x}$
9	$x = \dfrac{t-t^2}{1+t^2}; \quad y = \dfrac{t^2-t^3}{1+t^2}$	20	$x^2y^2 = x^3 - y^3$. Положить $y = tx$
10	$x = \dfrac{t^2}{t-1}; \quad y = \dfrac{t}{t^2-1}$	21	$\mathrm{ch}^2\, x - \mathrm{ch}^2\, y = 1$
11	$x = t + \mathrm{e}^{-t}; \quad y = 2t + \mathrm{e}^{-2t}$	22	$x^y = y^x \ \ (x > 0,\ y > 0)$

3. Построить графики функций, заданных в полярной системе координат (таблица 3).

Таблица 3

Вариант	Формула задания	Вариант	Формула задания
1	$r = 2R(1 + \cos\varphi)$	12	$r = ae^{k\varphi}; \quad k = \ln a$
2	$r = 2R(1 - \cos\varphi)$	13	$r = \dfrac{a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$
3	$r = \dfrac{p}{1+\cos\varphi}$, где $p = b^2/a$	14	$r = \dfrac{a\cos^2\varphi}{\sin\varphi}$
4	$r = a\sin 3\varphi$	15	$r = \dfrac{a\sin^2\varphi}{\cos^3\varphi}$
5	$r = a\sin 2\varphi$	16	$r = \dfrac{a\cos^2\varphi}{\sin^3\varphi}$
6	$r = a\cos 3\varphi$	17	$r = 1 + \cos\dfrac{\varphi}{2}$
7	$r = a\cos 2\varphi$	18	$r = 2 + \sin\dfrac{\varphi}{2}$
8	$r = \dfrac{3a\sin 2\varphi}{2(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)}$	19	$r^2 = 2a^2\cos^2\varphi$
9	$r = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$	20	$r = \dfrac{2}{\sqrt{\cos 3\varphi}}$
10	$r = \dfrac{v\varphi}{w}$	21	$r = a\cos\varphi + b$
11	$r = \dfrac{a}{\varphi}\ (0 < \varphi < \infty)$	22	$r = \dfrac{5}{\varphi}\ (0 < \varphi < \infty)$

Литература

1. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу.М:, Высшая школа, 1989
2. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. Математический анализ в вопросах и задачах.М:, Физматлит, 2000
3. Виленкин Н.Я. Функции в технике и природе.М:, Просвещение, 1985
4. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Математический анализ (учебно-методическое пособие).М:, Из-во МГУ, 1993, ч.I
5. Вирченко Н.А., Ляшко И.И., Швецов К.И. Графики функций. Справочник.К:, Наукова думка, 1979
6. Гельфанд И.М., Глаголева Е.Г.Функции и графики.М:, Просвещение, 1985
7. Гурский И.П. Функции и построение графиков.М:, Просвещение, 1988
8. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М:, Наука, 1990
9. Зорич В.А. Математический анализ.М:, Фазис, 1997, т.1
10. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа.М:, Физматлит, 1989, т.1
11. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ.М:, Из-во МГУ, 1998, т.1
12. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров.М:, Наука, 1989
13. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов.М:, ЮНИТИ, 2000
14. Ляшко И.И., ШвецовК.И. Графики функций. Справочник.К.:, Из-во "Наукова думка 1979
15. Райхмист Р.Б. Графики функций.М:, Высшая школа, 1997
16. Сивашинский И.Х. Элементарные функции и графики. М:, Наука, 1998
17. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М:, Физматлит, 1998, т.1
18. Шувалова Э.З., Агафонов В.Г., Богатырев Г.И. Повторим математику. М.:, Из-во "Высшая школа 1974
19. Шунда Н.Н. Функцiї та їх графiки. К:, Радянська школа, 1976