

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
филиал МГУ в г. Севастополе
факультет естественных наук
кафедра физики и геофизики

УТВЕРЖДЕНО
на 20 14 - 20 25 учебный год
Методическим советом Филиала
Протокол № 10 от 19.08 20 24 г.
Заместитель директора по учебной работе
Заведующий кафедрой

УТВЕРЖДАЮ

Директор
Филиала МГУ в г. Севастополе
О.А. Шпырко
« » 20 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)
Наименование дисциплины (модуля):

Интегральные уравнения и вариационное исчисление

код и наименование дисциплины (модуля)

Уровень высшего образования:
специалитет

Направление подготовки:
03.05.02 Фундаментальная и прикладная физика

(код и название направления/специальности)

Направленность (профиль) ОПОП:
общий

(если дисциплина (модуль) относится к вариативной части программы)

Форма обучения:
очная

очная, очно-заочная

Рабочая программа рассмотрена
на заседании кафедры физики и геофизики
протокол №4 от «21» июня 2023 г.
Заведующий кафедрой

(подпись)

(К.В. Показеев)

Рабочая программа одобрена
Методическим советом
Филиала МГУ в г. Севастополе
Протокол №6 от «28» июня 2023 г.

(подпись)

(Л.И. Теплова)

Севастополь, 2023

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего образования по специальности 03.05.02 «Фундаментальная и прикладная физика», утвержденным приказом МГУ от 29 декабря 2018 года № 1780 (в редакции приказа МГУ от 10 июня 2021 года № 609, от 7 октября 2021 года № 1048, от 21 декабря 2021 года № 1404), приказами об утверждении изменений в ОС МГУ от 29 мая 2023 года №700, от 29 мая 2023 года № 702, от 29 мая 2023 года № 703

Год (годы) приема на обучение: с 2020

курс – 2

семестры – 4

зачетных единиц – 3

академических часов – 68, в т.ч.

лекций – 34 часа

практических занятий – 34 часа

Форма промежуточной аттестации:

экзамен в 4 семестре

1. Цели и задачи учебной дисциплины:

Цели курса - изложение и доказательство основополагающих математических утверждений из теории интегральных уравнений и теории вариационного исчисления. В данном курсе изучаются основные виды интегральных уравнений, имеющих непосредственное отношение к уравнениям, возникающим при решении конкретных физических задач. В рассматриваемом курсе изложены основы вариационного исчисления, которое играет важную роль в решении конкретных физических задач.

2. Место дисциплины в структуре ОП ВО

Интегральные уравнения и вариационное исчисление входит в базовую часть блока общепрофессиональной подготовки ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО СТАНДАРТА, установленного Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова для реализуемых образовательных программ высшего профессионального образования по специальности «Фундаментальная и прикладная физика» образовательной программы. Курс интегральных уравнений и основ вариационного исчисления является вспомогательным курсом, целью которого является приобретение практических навыков решения конкретных задач физики с помощью сведения их к решению интегральных уравнений или нахождению экстремумов соответствующих функционалов. Перед курсом интегральных уравнений и вариационного исчисления студентам необходимо изучить базовый курс математического анализа, читаемый в предыдущих семестрах, а также курс линейной алгебры.

3. Требования к результатам обучения по дисциплине.

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование ряда общекультурных, общепрофессиональных и профессиональных компетенций.

Общекультурные компетенции:

- способность к самоорганизации и самообразованию (ОК-7);
- демонстрация общенаучных базовых знаний естественных наук, математики и информатики, понимание основных фактов, концепций, принципов теорий, связанных с комплексным анализом (ОК-10);
- способность использовать в научной и познавательной деятельности, а также в социальной сфере профессиональные навыки работы с информационными и компьютерными технологиями (ОК-14);
- умение приобретать новые научные и профессиональные знания, используя современные образовательные и информационные технологии (ОК-16).

Общепрофессиональные компетенции:

- способность решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением информационно-коммуникационных технологий и с учетом основных требований информационной безопасности (ОПК-1);
- способность использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования (ОПК-2);
- способность использовать основные естественнонаучные законы для понимания окружающего мира и явлений природы (ОПК-3).

Профессиональные компетенции:

- способность собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным, профессиональным, социальным и этическим проблемам (ПК-1);
- способность понимать и применять в исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат (ПК-2);
- способность осуществлять целенаправленный поиск информации о новейших научных и технологических достижениях в сети Интернет и из других источников (ПК-6);
- способность составлять и контролировать план выполняемой работы, планировать необходимые для выполнения работы ресурсы, оценивать результаты собственной работы (ПК-12);

Планируемые результаты обучения по дисциплине:

Знать: основные определения и понятия курса, основные принципы и теоремы из области интегральных уравнений и вариационного исчисления, доказательства базовых теорем и фактов.

Уметь: решать конкретные интегральные уравнения, находить экстремумы конкретных функционалов,

Владеть: профессиональными знаниями касательно основных теоретических положений, принципов и методов теории интегральных уравнений и вариационного исчисления, критически анализировать и излагать базовую информацию

4. Структура учебной дисциплины.

Общая трудоемкость дисциплины составляет:

зачетных единиц - 3

академических часов 68

лекций - 34

семинарских занятий -34

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

№ п/п	Название темы	Количество часов			Формы текущего контроля
		Л	С (П,Л)	СРС	
1.	Введение	2	---	2	опрос
2.	Основы теорий метрических, нормированных пространств, теории линейных операторов	4	3	5	опрос
3.	Собственные значения и собственные функции операторов, теорема Гильберта- Шмидта.	8	3	8	опрос
4	Решение неоднородного уравнения Фредгольма. Принцип сжимающих отображений.	6	4	5	опрос
5	Уравнение Вольтерра	4	3	6	опрос
6	Вариационный функционал, экстрему-	6	2	10	тест

	мы. Задача с закрепленными концами. Задача с подвижной границей				
7.	Уравнение Эйлера. Классические задачи вариационного исчисления и их решение	4	2	5	
8	Систематизация выученного материала курса перед экзаменом.		---	16	самостоятельная работа
Всего:		34	17	57	
9					Экзамен -34 ч

где: С – семинарские занятия, П – практические занятия, Л – лабораторные занятия,
СРС – самостоятельная работа студентов.

4.1. Содержание разделов дисциплины

А. План лекций

№ п/п	Номер занятия	Наименование темы и содержание лекции	Кол. часов
1	1-1	Введение	2
2	2-1	Метрические и нормированные пространства	2
3	2-2	Гильбертовы пространства	2
4	3-1	Элементы теории линейных операторов	2
5	3-2	Собственные значения и собственные векторы вполне непрерывного самосопряженного оператора	2
6	3-3	Характеристические числа и собственные функции интегрального оператора Фредгольма с симметрическим непрерывным ядром	2
7	3-4	Теорема Гильберта-Шмидта	2
8	4-1	Принцип сжимающих отображений. Неоднородное уравнение Фредгольма 2-го рода с малым параметром	2
9	4-2	Уравнение Фредгольма с произвольными непрерывными ядрами. Теоремы Фредгольма	2
10	4-3	Интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода как пример некорректно поставленной задачи	2
11	5-1	Задача Штурма-Лиувилля	2
12	5-2	Линейное уравнение Вольтерра	2
13	6-1	Функционал. Вариация функционала экстремумы функционала. Задача с закрепленными концами.	2
14	6-2	Задачи на условный экстремум	2
15	6-3	Задачи с подвижной границей	2
16	7-1	Уравнение Эйлера. Специальные случаи.	2
17	7-2	Достаточные условия экстремума в задаче с закрепленными концами	2

Б. План семинарских (практических или лабораторных) занятий

№ п/п	Номер и вид занятия	Наименование темы и содержание	Кол. часов
1	2-1	Метрические пространства и линейные операторы	2
2	2-1, 3-1	Собственные значения и собственные векторы операторов	2
3	3-2	Собственные значения и собственные векторы самосопряженных операторов	2
4	4-1	Решение уравнения Фредгольма методом Гильберта-Шмидта	2
5	4-2	Решение уравнения Фредгольма с вырожденными ядрами	2
6	5-1	Решение простейших уравнения Вольтерра и приводящих к ним физических задач	3
7	6-1	Решение классических задач вариационного исчисления	2
8	7-1	Составление и решение уравнений Эйлера	2

5. Рекомендуемые образовательные технологии.

В процессе преподавания дисциплины используются следующие методы:

- лекции;
- семинары;
- домашние задания;
- контрольные работы;
- коллоквиум;
- консультации преподавателей;
- самостоятельная работа студентов (изучение теоретического материала, подготовка к практическим занятиям, выполнение домашних, подготовка к текущей и промежуточной аттестации).

Чтение лекций по данной дисциплине проводится традиционным способом.

При работе используется диалоговая форма ведения лекций с постановкой и решением проблемных задач, обсуждением дискуссионных моментов и т.д.

При проведении семинаров создаются условия для максимально самостоятельного выполнения заданий. Поэтому при проведении практического занятия преподавателю рекомендуется:

1. Провести экспресс-опрос (устно или в тестовой форме) по теоретическому материалу, необходимому для выполнения работы (с оценкой).
2. Проверить правильность выполнения заданий, подготовленных студентом дома (с оценкой).

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы.

Любой практическое занятие включает самостоятельную проработку теоретического материала и изучение методики решения типичных задач. Некоторые задачи содержат элементы научных исследований, которые могут потребовать углубленной самостоятельной проработки теоретического материала.

При организации внеаудиторной самостоятельной работы по данной дисциплине преподавателю рекомендуется использовать следующие ее формы:

- решение студентом самостоятельных задач обычной сложности, направленных на закрепление знаний и умений;
- выполнение индивидуальных заданий повышенной сложности, направленных на развитие у студентов научного мышления и инициативы.

Студентам предоставляется возможность для самоподготовки и подготовки к экзамену использовать электронный вариант конспекта лекций, подготовленный преподавателем в соответствии с планом лекций.

Варианты заданий для самостоятельной работы

№№ п/п	Задание	Часы
1.	Неравенство Коши-Буняковского	2
2.	Эквивалентность определений непрерывности и ограниченности линейного оператора	4
3.	Собственные значения и другие свойства оператора Фредгольма	4
4.	Ортогональность собственных векторов, соответствующих различным собственным значениям	3
5.	Теорем о конечности различных собственных значений вполне непрерывного самосопряженного оператора	5
6.	Свойства оператора Гильберта-Шмидта	4
7.	Формула для решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го ряда с помощью резольвенты	5
8.	Принцип сжимающих отображений	5
9.	Положительность собственных значений задачи Штурма-Лиувилля	5
10.	Теорема о необходимых условиях экстремума для изопериметрической задачи с закрепленными концами	4
17.	Подготовка к экзамену	16

7. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.

на лекциях: контрольный опрос по пройденному материалу;

на семинарах: выборочная проверка выполнения домашних заданий, оценка выполнения заданий программы семинара.

Перечень вопросов к экзамену

1. Физические задачи, приводящие к интегральным уравнениям
2. Типы интегральных уравнений.
3. Метрические и нормированные пространства. Сходимость в этих пространствах
4. Линейные операторы. Непрерывность, ограниченность, компактность (вполне непрерывность)

5. Вполне непрерывность оператора Фредгольма
6. Существование максимального элемента самосопряженного, вполне непрерывного оператора
7. Существование собственного вектора самосопряженного вполне непрерывного оператора, соответствующего собственному значению
8. Существование ненулевого собственного значения оператора Фредгольма
9. Неравенство Коши-Буняковского
10. Построение последовательности собственных значений и собственных векторов вполне непрерывного самосопряженного оператора
11. Теоремы об ортогональности собственных векторов и их количество
12. Теорема о структуре нуль-пространства самосопряженного вполне непрерывного оператора
13. Отыскание собственных значений оператора Фредгольма
14. О вещественности собственных значений оператора Фредгольма, действующего в пространстве
15. Теорема о единственности решения уравнения Фредгольма
16. Теорема о числе решений неоднородного уравнения Фредгольма
17. Лемма о разложении
18. Начально-краевая задача для дифференциального уравнения в частных производных (Малые поперечные колебания струны).
19. Задача Штурма-Лиувилля
20. Теорема Стеклова
21. Необходимое условие экстремума функционала
22. Необходимое условие экстремума для задачи с закрепленными концами
23. Основная лемма вариационного исчисления
24. Необходимое условие экстремума для задачи с закрепленными концами и неголономной связью
25. Необходимое условие экстремума для задачи с закрепленными концами и голономной связью
26. Необходимые условия экстремума для задачи левым закрепленным и правым подвижным концами
27. Достаточные условия экстремума в задаче с закрепленными концами
28. Интегральное уравнение Фредгольма 1-го ряда как пример некорректно поставленной задачи
29. Метод регуляризации А.Н.Тихонова

Варианты задач

1. Показать, что функция $\varphi(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ является решением интегрального уравнения Вольтера $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} - \int_0^x \frac{t}{1+t^2} \varphi(t) dt$.
2. Решить уравнение сведением его к дифференциальному уравнению $\varphi(x) = x + \int_0^x x \cdot t \cdot \varphi(t) dx$.
3. С помощью резольвенты решить уравнение $\varphi(x) = e^x + \int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dx$.
4. Найти экстремали функционала $J[y] = \int (12xy - (y')^2) dx$; $y(-1) = 1$ $y(0) = 0$.

5. Показать, что функция $\varphi(x) = \frac{X}{(1+x^2)^{5/2}}$ является решением интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \frac{3X + 2X^3}{3(1+X^2)^2} - \int_0^x \frac{3X + 2X^3 - X}{(1+X^2)^2} \cdot \varphi(x) dx.$$

6. Решить уравнение сведением его к дифференциальному уравнению $\int_0^x e^{x+t} \cdot \varphi(x) dt = x$.

7. С помощью резольвенты решить уравнение $\varphi(x) = \sin x + 2 \int_0^x e^{x-t} \varphi(x) dt$.

8. С помощью резольвенты решить уравнение $\varphi(x) = \sin x + 2 \int_0^x e^{x-t} \varphi(x) dt$.

8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

Основная литература:

1. Васильева А.Б., Тихонов А.Н. Интегральные уравнения. М.; Физматлит, 2002
2. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.; УРС, 2000.
3. Владимиров В.С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.; Наука, 1982.
4. М.Л.Краснов; А.Н.Киселев; Г.Н.Макаренко. Интегральные уравнения. М.; Наука, 1976.

Дополнительная литература:

1. Владимиров С.В. Уравнения математической физики. М.; Наука, 1981
2. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию. М.; Наука, 1981.
3. Карташев А.П., Рождественский Б.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основа вариационного исчисления. М.; Наука, 1980.
4. Васильева А.Б., Медведев Г.Н., Тихонов А.Н., Уразгильдина Т.А. Дифференциальные и интегральные уравнения. Вариационное исчисление. Москва. Физматлит., 2003.
5. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.; Наука, 1965.
6. А.Б.Люстерник, П.Н.Князев, Я.В.Радыно. Задачи и упражнения по функциональному анализу. Минск; «Вышэйшая школа», 1978.

Материально-техническое обеспечение дисциплины.

Специализированные аудитории – нет.

Лекции и практические занятия проводятся в стандартно оборудованных учебных аудиториях университета.

Учебно-лабораторное оборудование – нет.

9. Соответствие результатов обучения по данному элементу ОПОП результатам освоения ОПОП указано в общей характеристике ОПОП.

10. Язык преподавания русский.

11. Преподаватель (преподаватели).

Профессор кафедры физики и геофизики, доктор физико-математических наук
Александр Алексеевич Слепышев.

12. Автор (авторы) программы.

Старший преподаватель кафедры физики и геофизики, руководитель образовательной программы специалитета 03.05.02 «Фундаментальная и прикладная физика» Андрей Валерьевич Сулимов.

**ОФОРМЛЕНИЕ ЭКЗАМЕНАЦИОННОГО БИЛЕТА
ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ И ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ,
ПРОВОДИМОЙ В ФОРМЕ УСТНОГО ЭКЗАМЕНА**

Формат (в зависимости от количества вопросов, наличия или отсутствия задач и т.п.) А-5
или А-6

ФИЛИАЛ МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА имени М.В. ЛОМОНОСОВА в г. СЕВАСТОПОЛЕ

Направление ____ 03.05.02 «Фундаментальная и прикладная физика» _____

(шифр (шифры) и название (названия) направления (направлений) подготовки)

Учебная дисциплина ____ Интегральные уравнения и вариационное исчисление _____

Семестр __4_____

Экзаменационный билет № 1

1. Компактность оператора Гильберта-Шмидта
2. Основная лемма вариационного исчисления
3. Решить уравнение сведением его к дифференциальному уравне-

нию $\varphi(x) = x + \int_0^x x \cdot t \cdot \varphi(x) dx$

Утверждено на заседании кафедры,
протокол № ____ от « ____ » _____ 20__ г.

Зав. кафедрой _____ (К.В. Показеев)

Преподаватель _____ (А.А. Слепышев)